تمارين [١] على تنظيم البيانات فى مصفوفات

[١] أكمل ما يأتي بالإجابة الصحيحة :

❶ إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢×٢ وكانت $أ_{١١}$ = ٣ ، $أ_{٢٢}$ = ٥ ، $أ_{٢١}$ = −٢ ، $أ_{١٢}$ = صفر
فإن المصفوفة أ تكون على صورة ....

❷ إذا كانت ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ٤ & -٣ \end{pmatrix}$ فإن ب تسمى مصفوفة ...... وتكون على نظم .....

❸ إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} -٦ \\ ٥ \end{pmatrix}$ فإن س تسمى مصفوفة .... وتكون على نظم ......

❹ إذا كانت ص = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ & -٢ \\ ٣ & ٤ & -١ \end{pmatrix}$ فإن المصفوفة ص تكون على نظم ......
، $ص_{٢١}$ = ... ، $ص_{٣٢}$ = ...

❺ إذا كانت : □ هي المصفوفة الصفرية على النظم ٣×٣ فإن المصفوفة $□^{مد}$ هي ......

❻ إذا كانت س = $\begin{pmatrix} ٤ & -٣ \end{pmatrix}$ فإن $س^{مد}$ = ... وتكون على نظم ....

❼ إذا كانت س = $\begin{pmatrix} -١ & -٥ & ٠ \\ ١ & ٣ & ٩ \end{pmatrix}$ ، ص = $س^{مد}$ فإن $س_{٣١}$ = ... ، $ص_{١٢}$ = ...

❽ إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٢ & ١٥ \\ ٨ & ٤ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٤ & ١٥ \\ ٨ & أ \end{pmatrix}^{مد}$ فإن : أ = ...

[٢] اكتب جميع عناصر المصفوفات الاتية

❶ أ = [$أ_{ص ع}$] ، ص = ١ ، ٢ ، ٣ ، ع = ١ ، ٢ ، ٣

❷ ب = [$ب_{س ص}$] ، ص = ١ ، ٢ ، ع = ١

❸ ج = [جـ س ص] ، ص = ١ ، ع = ١ ، ٢ ، ٣



[٣] اكتب نوع كل مصفوفة ونظمها

① $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} ٤ & ٦ & ٠ & ٨ \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \\ ٥ \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ ⑥ $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

[٤] استخدم المصفوفة ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & ٢ \\ ٥ & ٧ \end{pmatrix}$ للإجابة عن ما يلى

❶ ما نظم المصفوفة ب؟ ❷ ما قيمة $ب_{٢١}$ ، $ب_{١٢}$ ؟

[٥] أوجد قيم س ، ص ، ع ، م إذا علم أن:

$\begin{pmatrix} ٣س & ٨ \\ ٢س + ع & ٢ص - م \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢١ & ٢ص \\ ١٥ & ٠ \end{pmatrix}$

[٧ ، ٤ ، ١ ، ٨]

[٦] أوجد قيم س ، ص ، ع ، م إذا علم أن :

$\begin{pmatrix} ٥س & س + ع \\ ٧ & ٢س + ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٥ & ٤ \\ س + ص & م \end{pmatrix}$

[٧ ، ٠ ، -٣ ، ١٤]

[٧] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢س + ٣ص \\ س + ٧ص \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٥ & ٣ \end{pmatrix}$ أوجد قيم س ، ص

التى تحقق أنى أ = $ب^{مد}$ ومن ثم أوجد أ

[-٤ ، ١]

[٨] إذا كانت $\begin{pmatrix} ٣س - ص & -١ \\ ٤ & س + ٢ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٥ & ٣س + ٤ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ أوجد قيم س ، ص

[-١ ، ٢ ، ١]



[٩] أوجد قيم س ، ص ، ع ، م **التى تحقق**

$$\begin{pmatrix} \text{س} + \text{ص} + \text{ع} & \text{س} - \text{ص} + ٣\text{م} \\ \text{س} + \text{ص} & \text{س} - \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & ٨ \\ ٩ & ٥ \end{pmatrix}$$

[٧، ٢، −٣، ١]

[١٠] أوجد قيم س ، ص ، ل ، م **التى تحقق أن :**

$$\begin{pmatrix} \text{س}^{٢} + ١ & -٨ \\ ٤ & \sqrt{٦} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & \text{ل}^{٣} \\ ٢\text{ص} + ١ & ٦^{\text{م}} \end{pmatrix}$$

[±٢، $\frac{٣}{٢}$، −٢، $\frac{١}{٢}$]

[١١] أوجد قيم س ، ص ، ل ، ع **التى تحقق أن :**

$$\begin{pmatrix} ٨ & ١٥ \\ -١ & \text{ع} + \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ل}^{٣} & \text{س}^{٢} - ١ \\ \text{ص} & ٨ \end{pmatrix}$$

[±٤، −١، ٩، ٢]

[١٢] أوجد قيم س ، ص ، ل ، م **التى تحقق أن :**

$$\begin{pmatrix} ٤\text{س} & ٥\text{ص} - ٩ \\ ٣\text{ل} - ٢\text{م} & ٤\text{ل} + \text{م} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٦ & ٢\text{س} + ٣ \\ ١٦ & ٧ - ٢\text{ل} \end{pmatrix}$$

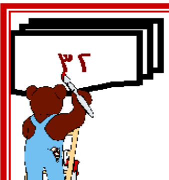
[٩، ٦، ٢، −٥]

[١٣] اكتب المصفوفة أ = [$\text{أ}_{\text{هـ ى}}$] عند $\text{أ}_{\text{هـ ى}}$ = هـ − ى + ٢ إذا كانت أ على نظم ٣ × ٢ ثم أوجد $\text{أ}^{\text{مد}}$ ولتكن ح ثم اذكر نظم ح وقيمة كل من $\text{ح}_{٣١}$ ، $\text{ح}_{٣٢}$

[١٤] إذا كانت المصفوفة ب = [$\text{ب}_{\text{هـ ى}}$] حيث $\text{ب}_{\text{هـ ى}}$ = ٢هـ − ٣ى ، ب على نظم ٣×٣ اكتب المصفوفة ب ، $\text{ب}^{\text{مد}}$ ولتكن أ = [$\text{أ}_{\text{هـ ى}}$] أوجد كل من $\text{أ}_{١٣}$ ، $\text{أ}_{٣٢}$ ، $\text{أ}_{٢١}$ ، $\text{أ}_{١٢}$ ، $\text{أ}_{٣٣}$

[١٥] كون المصفوفة $\tilde{\text{س}}$ = [$\tilde{\text{س}}_{\text{هـ ى}}$] وهى على نظم ٢×٢ حيث

$$\tilde{\text{س}} = \begin{cases} \text{صفر} & \text{عند هـ = ى} \\ \text{هـ + ى} & \text{عند هـ} \neq \text{ى} \end{cases}$$



تمارين [٢] على العمليات على المصفوفات

[١] أجر العمليات التالية ان أمكن :

١) $\begin{pmatrix} ٤ & ١ & -٢ \\ ٣ & ٣ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٢ & ٣ & ٤ \\ -١ & ٣ & ٩ \end{pmatrix}$

٢) $\begin{pmatrix} ٠ & -٥ & -١ \\ ٩ & ٣ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ ٨ & ٦ \end{pmatrix}$

٣) $\begin{pmatrix} ١ & ٥ & ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٣ & ٤ & ٠ \end{pmatrix}$

٤) $\begin{pmatrix} ٦ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٦ & ٨ \\ ٩ & ٥ \end{pmatrix}$

٥) $\begin{pmatrix} ١ & -٢ & -١ \\ ٥ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٥ & ٨ \\ ٣ & ٠ \\ ٧ & ٤ \end{pmatrix}^{\text{مد}}$

---

[٢] إذا كانت

$أ = \begin{pmatrix} ٣ & -١ & -٤ \\ -٧ & ٣ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & -٢ & -٥ \\ ٣ & ٥ & ٠ \end{pmatrix}$

، $ج = \begin{pmatrix} ٠ & -٨ & ٠ \\ ١ & ١ & ٩ \end{pmatrix}$ **أوجد كلا من**

١) أ + ب + ج ٢) أ + ب − ج ٣) أ − ب + ج ٤) أ − ب − ج

---

[٣] إذا كانت

$أ = \begin{pmatrix} -٤ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٥ & ٢ \\ ٦ & -٩ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٠ & -١ & ٢ \\ ٦ & -٥ & ٠ \\ -٨ & ٦ & -١ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة $ج = (أ + ب)^{\text{مد}}$ **ومن ثم عين قيمة كل من** $ج_{٢١}$ ، $ج_{٣٢}$ ، $ج_{١٣}$



✍ **[٤] إذا كانت** أ = $\begin{pmatrix} ١٠ & -٩ & -١ \\ ٥ & -٢ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٥ & -٣ & -٢ \\ ٠ & ١ & -٥ \end{pmatrix}$

ج = $\begin{pmatrix} ٤ & -٣ & -١ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ **اثبت أن** أ + ٢ ب = ٥ ج

✍ **[٥] إذا كانت** أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ & -١ \\ ٢ & ٢ & ٠ \\ ١ & -٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ & -١ \\ ١ & ٥ & ٣ \\ -٣ & -١ & ١ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٠ & ٣ & -٤ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ٥ & -١ & ٠ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س = ٣ أ + ٢ب – ٣ج

✍ **[٦] إذا كانت** أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٥ & -٦ \\ ١ & -٦ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} -٢ & -٤ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س = ٤ أ – ٥ ب + ٣ ج

✍ **[٧] إذا كانت** أ = $\begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ ٠ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٣ & -١ \\ ١ & -٤ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س **التى تحقق المعادلة :** س + ٤ أ – ٦ ب = □

✍ **[٨] إذا كانت** أ = $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٢ & -٣ \\ ٠ & -٣ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ١ & -٤ \\ -١ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س **التى تحقق المعادلة :** ٢ $س^{مد}$ + ٣ أ + ب = ٤ج

✍ **[٩]** إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٦ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٩ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} -٧ & -٣ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س~ التى تحقق المعادلة : $٢ (ب - س\sim) = ٤ (س\sim + ج) - ٢ أ$

✍ **[١٠]** إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٠ & -٢ & -٢ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & -٣ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٥ \\ ١ & ٠ & ٤ \\ ٣ & ٤ & ٠ \end{pmatrix}$

$ج = \begin{pmatrix} ٠ & ١ & -١ \\ ٢ & ٠ & ١ \\ ١ & -١ & ٠ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س~ التى تحقق المعادلة : $أ + ٣ ب - ٣ س\sim^{مد} = ٤ ج$

✍ **[١١] إذا كانت** $م = \begin{pmatrix} ٠ & -١ & ١ \\ ١ & -٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ٥ & ٠ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix}$

اثبت أن : $(٣ أ - ٢ ب^{مد})^{مد} = ٣ أ^{مد} - ٢ ب$

✍ **[١٢] حقق العبارة الآتية :**

$$\begin{pmatrix} ب & م \\ ء & جـ \end{pmatrix} = م \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} + ب \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} + جـ \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} + ء \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$$

واستخدم ذلك للتعبير عن المصفوفة $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ٠ \end{pmatrix}$ **كمجموع اربعة مصفوفات على نظم** ٢ × ٢

بحيث يحتوى كل منها على ثلاث أصفار وواحد بشرط تكون المصفوفة مضروبة فى عدد مناسب



✍ [١٣] **إذا كانت**

$$\begin{pmatrix} ٤ & ١٤ & ٣ \\ ١٤ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ٧ \end{pmatrix} = ٣\,س + ٢\,ص + ٧\,ع$$

فأوجد كلا من المصفوفات س ، ص ، ع

✍ [١٤] **إذا كان مدور المصفوفة**
$\begin{pmatrix} ٢م-١ & ل+٣ \\ ٥ك & ٢-ن \end{pmatrix}$
يساوى المعكوس الجمعى للمصفوفة
$\begin{pmatrix} ٤م & ٢ \\ ٣ن & ل+٢ \end{pmatrix}$
أوجد قيم ل ، م ، ن ، ك

✍ [١٥] **إذا كانت**

$$\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix} = ل \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} - م \begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

فأوجد قيمة ل ، م [٢، ٣]

✍ [١٦] **أوجد قيم** س ، ص ، ع **التى تحقق أن :**

$$س \begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٢ \end{pmatrix} + ص \begin{pmatrix} ٠ \\ ٢ \\ ٥ \end{pmatrix} + ع \begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \\ -٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٦ \\ ٥ \\ ١٧ \end{pmatrix}$$

[−١٥، ٧، −٣]

✍ [١٧] **أوجد قيم** س ، ص ، ع **التى تحقق أن :**

$$س \begin{pmatrix} ص & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix} + ع \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ل & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٥ & ٧ \end{pmatrix}$$

[١، ٢، ١، ٠]

[١٨] أوجد قيم س ، ص ، ع ، ل التى تحقق أن :

$$\begin{pmatrix} ١ & ل \\ س & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ل & ص \\ ص & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ص & ع \\ س & ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ع & س \\ م & ص \end{pmatrix}$$

[٠، ١، ٢، ١]

---

[١٩] إذا كانت

$$س = \begin{pmatrix} م & ل \\ ك & ن \end{pmatrix} ،\quad ص = \begin{pmatrix} ٢ & ل \\ ك & ٥ \end{pmatrix} ،\quad ع = \begin{pmatrix} ٣ - م & ل + ٢ \\ ك + ٤ & ٠ - م \end{pmatrix}$$

فأوجد قيم ل ، م ، ن ، ك التى تحقق المعادلة : $س + ٣ص - ٢ع = \square$ [٤، −١٣، ٠، ٠، ٢]

---

[٢٠] إذا كانت

$$أ = \begin{pmatrix} -١ & ٤ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} ،\quad ب = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix} ،\quad ج = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$$

أوجد المصفوفة س التى تحقق أن : $٢أ - ٣ب^{مد} + ٢س = ٥أ^{مد} + ج - س^{مد}$

---

[٢١] إذا كانت

$$أ = \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix} ،\quad ب = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$$

أوجد المصفوفة س التى تحقق أن : $٣أ - ٢س = (٢ب + س)^{مد}$

تمارين [٣] على تنظيم البيانات فى مصفوفات

[١] اذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢- & ١ \\ ٦- & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢- & ٢- \\ ١- & ٠ \end{pmatrix}$ حقق ان: أ ب ≠ ب أ

---

[٢] اذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ١- & ١ \\ ١ & ٢- & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣- & ٢ \\ ١ & ٠ \\ ٠ & ١- \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$

اذكر أى من حواصل الضرب أ ب ، ب أ ، أ ج ، ج أ ، ب ج ، ج ب يكون معرفا ثم اذكر نظم المصفوفة الناتجة وأوجدها إذا كان حاصل الضرب ممكنا

---

[٣] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١- \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٣- & ٢ \\ ٠ & ١- & ٠ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٤ & ١٤ & ٣ \\ ١٤ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ٧ \end{pmatrix}$

اذكر أى حواصل الضرب أ ب ، ب أ ، أ ج ، ج أ ، ب ج ، ج ب يكون معرفا ثم اذكر نظم المصفوفة الناتجة وأوجدها إذا كان حاصل الضرب ممكنا

---

[٤] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١- & ١ \\ ١- & ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١- & ٠ \\ ٢ & ٠ \\ ٠ & ٣- \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ١- & ١ \\ ٠ & ١ \\ ٢- & ٠ \end{pmatrix}$

فاثبت أن : أ (ب + ج) = أ ب + أ ج ماذا تسمى هذه الخاصية

---

[٥] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ١- \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢- & ٠ \\ ١- & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٠ \\ ١ \\ ٠ \end{pmatrix}$

فاثبت أن : أ (ب + ج) = أ ب + أ ج ماذا تسمى هذه الخاصية

✍ [٦] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} -٥ & -٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ & -١ \\ -٤ & -٣ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ & -١ \\ — & -٣ & ١ \\ & ٣ & ٥-١ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} [illegible] & -٢ & ٢ \\ [illegible] & ٣ & -١ \\ -٣ & -٢ & ١ \end{pmatrix}$

فاثبت أن : ❶ أ ب = ب أ = □ ❷ أ ج = أ ❸ ج أ = ج

✍ [٧] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٣ & ١ \\ ١ & ٣ & -٢ \\ -٦ & -١ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $I_٣$ هى مصفوفة الوحدة على نظم ٣×٣

اثبت أن : أ $I_٣$ = $I_٣$ أ = أ

✍ [٨] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٠ & -٢ & ٤ \\ -٣ & ١ & -٢ \end{pmatrix}$ أوجد كلا من أ $أ^{مد}$ ، $أ^{مد}$ أ هل هما متساويان

✍ [٩] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٠ & جاهـ & جتاهـ \\ ٠ & جتاهـ & -جاهـ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ أوجد كلا من أ $أ^{مد}$ = I

✍ [١٠] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ اثبت أن : $(أ\ ب)^{مد}$ = $ب^{مد}$ $أ^{مد}$

✍ [١١] إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٠ & -٢ & ٤ \\ -٣ & ١ & -٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٠ \\ ٠ & -٣ \end{pmatrix}$ حقق أن : $(أ\ ب)^{مد}$ = $ب^{مد}$ $أ^{مد}$

✍ [١٢] إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & م \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ن \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & جـ & ٠ \end{pmatrix}$

اثبت أن : $ج^{مد}$ $ب^{مد}$ $أ^{مد}$ = $(أ\ ب\ ج)^{مد}$



[١٣] إذا كان $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & -١ & ٠ \\ ٢ & ٠ & -١ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ & ١ \\ ٠ & ٠ & -١ \end{pmatrix}$

أوجد ناتج : $\text{أ ب}^{\text{مد}} + \text{ب أ}^{\text{مد}}$

---

[١٤] إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$ اثبت أن

❶ $\text{أ}^٢ = ٤\,\text{أ}$ ❷ $\text{ب}^٢ = ٤\,\text{ب}$ ❸ $\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ = ١٦\,I$ ❹ $\text{أ}^٢\,\text{ب}^٢ = \square$

---

[١٥] إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ اثبت أن : ❶ $\text{أ}^٣ = ٧\,\text{أ}$ ❷ $\text{أ}^٤ = ٧\,\text{أ}^٢$

---

[١٦] إذا كانت $\text{ت}^٢ = -١$ ، $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{ت} & ٠ \\ ٠ & \text{ت} \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٠ & -\text{ت} \\ -\text{ت} & ٠ \end{pmatrix}$

اثبت أن : $\text{أ}^٢\,\text{ب}^٢ = I$

---

[١٧] إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ ٠ & -٣ \end{pmatrix}$

اثبت أن $(\text{أ} - \text{ب})^٢ \neq \text{أ}^٢ - ٢\,\text{أ ب} + \text{ب}^٢$

---

[١٨] إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$ اثبت أن $(\text{أ} - ٣\,I)^٢ = \text{أ}^٢ - ٦\,\text{أ} + ٩\,I$

---

[١٩] إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ اثبت أن $\text{أ}^٢ - \text{أ} - ٥\,I = \square$

---

[٢٠] إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ اثبت أن $\text{أ}^٢ - ٤\,\text{أ} - ٥\,I = \square$



✍ [٢١] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & -١ \\ ٠ & ١ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & -١ \end{pmatrix}$

اثبت أن : ٣ $\text{أ}^{٤}$ + ٢ $\text{ب}^{٢}$ − ٥ I = □

✍ [٢٢] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ أوجد $\text{أ}^{٢}$ ، $\text{أ}^{٣}$ ثم اثبت أن : $\text{أ}^{٥}$ = $\text{أ}^{\text{مد}}$

✍ [٢٣] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$ اثبت أن : (٥ $\text{أ}^{٢}$ + $\text{أ}^{\text{مد}}$ $)^{٣}$ = ٥ I

✍ [٢٤] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$ فاكتب فى صورة مصفوفة واحدة

كل من $\text{أ}^{٢}$ + أ ب + ٢ ب ، (أ + ب + I)(أ + ب − I) حيث I مصفوفة الوحدة على نظم ٢×٢

✍ [٢٥] إذا كانت س = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ، I هى مصفوفة الوحدة على نظم ٢×٢

حقق أن : (I + س $)^{٣}$ = I + ٣ س + ٣ $\text{س}^{٢}$ + $\text{س}^{٣}$

✍ [٢٦] إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ اثبت أن : $\text{أ}^{ن}$ = $٢^{ن-١}$ أ حيث ن عدد صحيح موجب

✍ [٢٧] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ك & ٠ & ٠ \\ ٠ & ل & ٠ \\ ٠ & ٠ & م \end{pmatrix}$ أوجد كلا من $\text{أ}^{٢}$ ، $\text{أ}^{٣}$

ثم استنتج $\text{أ}^{ن}$ حيث ن عدد صحيح موجب



✍ **[٢٨] إذا كانت** $أ = \begin{pmatrix} م & ١ \\ ٠ & م \end{pmatrix}$ **أوجد كلا من** $أ^{٢}$ ، $أ^{٣}$ ، $أ^{٤}$

ثم استنتج $أ^{ن} = م^{ن-١} \begin{pmatrix} م & ن \\ ٠ & م \end{pmatrix}$ ن **عدد صحيح موجب** ، $م \neq صفر$

✍ **[٢٩] إذا كانت :** $س = \begin{pmatrix} أ & ب \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $ص = \begin{pmatrix} ٠ & ج \\ ٠ & د \end{pmatrix}$ **فأوجد كلا من :**

$س^{٢}$ ، $س^{٣}$ ، .... **ثم استنتج صورة** $س^{ن}$ ، **بالمثل صورة** $ص^{ن}$ **ثم اوجد المصفوفة**

$س^{٥} ص^{٢}$ **واستخدم الصورة الناتجة لحساب** $س^{٤} ص^{٧}$

✍ **[٣٠] أوجد قيم** أ ، ب ، ج ، د **التي تحقق أن :**

$$\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix} + ٢ \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix} - ٣ \begin{pmatrix} ١ \\ ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix}$$

[٢٦- ، ٧- ، ١٧- ، ٢-]

✍ **[٣١] أوجد قيم** أ ، ب ، ج ، د **التي تحقق المعادلة :**

$$\begin{pmatrix} -١ & أ \\ ١ & ب \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ ١ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ج & ٢ \\ ٤ & د \end{pmatrix}$$

[٠ ، ٢- ، ٣- ، ١]

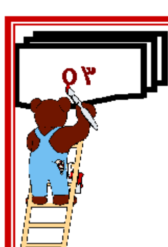
✍ **[٣٢] أوجد قيم** س **التي تحقق المعادلة :**

$$\begin{pmatrix} ١ & س \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ س & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ \\ س - ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢س \end{pmatrix}$$

[٠ ، ٢- ، ٣- ، ١]

✍ **[٣٣] إذا كانت** $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$

فأوجد قيمة العددين س ، ص **اللذين يحققان المعادلة :** $أ^{٢} + س أ + ص I = □$



✍ [٣٤] أوجد قيم س ، ص ، ع التى تحقق المصفوفية :

$$\begin{pmatrix} ٥ & -١ & ٦ \\ ٠ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢٥ \\ ١٠ \\ -٨ \end{pmatrix}$$

✍ [٣٥] أوجد قيم س ، ص ، ع التى تحقق المصفوفية :

$$\begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٥ & س & ٢ \\ ١ & -١ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & ١ & ٢ \\ ص & ٣ & ٢ \\ ١ & -٢ & ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ١٣ & -٣ \\ ٢٢ & ١ & ١٦ \\ ٥ & -٤ & ٣ \end{pmatrix}$$

✍ [٣٦] أوجد قيمة كل من ف ، م مستخدما قاعدة ضرب المصفوفات إذا كانت

$$\begin{pmatrix} ١ \\ ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ١٠ & ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٧ & -٧ \\ ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ف \\ م \end{pmatrix}$$

✍ [٣٧] أوجد المصفوفة س~ التى تحقق المعادلة :

$$٣ \, س\sim + أ = أ^{٢} \quad \text{حيث} \quad أ = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ١ & -٥ \end{pmatrix}$$

✍ [٣٨] إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س~ التى تحقق أن : $س\sim^{مد} = (أ \, ب)^{مد} + أ^{٢}$

✍ [٣٩] إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٨ & -٤ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة ج بحيث ج أ = ب

[٤٠] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٧ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١- & ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س **بحيث** أ س = ب

---

[٤١] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢- & ١- \end{pmatrix}$ **فأوجد** أ^{٥} **ثم حل المعادلة** (أ + أ^{٢} + أ^{٣}) س = أ^{٥}

---

[٤٢] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢- \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ **اثبت أن المصفوفة** س

التى تحقق العلاقة أ س = س أ **تكون بالصورة** $\begin{pmatrix} ل & م-٢ل \\ م & ٤ \end{pmatrix}$

---

[٤٣] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ **اثبت أن المصفوفة** س

التى تحقق أ س = س أ **تكون على صورة** $\begin{pmatrix} جـ & ب & م \\ ب & م & جـ \\ م & جـ & ب \end{pmatrix}$

---

[٤٤] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢س \\ ص & ٠ \end{pmatrix}$

أوجد قيم س ، ص **التى تحقق أن:** (أ^{مد})^{٢} − أ − أ^{مد} − ٤ I = ☐ [($\frac{١-}{٢}$ ، ٤) أو (٢ ، ١-)]

---

[٤٥] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١- & ٣ \\ ٢- & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٤ & ١- \\ ٢- & ١ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س **التى تحقق أن :** ٣ أ^{مد} + ب^{مد} + ٣ س = أ^{٢} + ٢ س^{مد}

---

[٤٦] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢- \\ ٠ & ١- \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١- & ٣- \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س **التى تحقق أن :** أ^{٢} + ٢ أ ب + ٣ س^{مد} = ب^{مد} + س



✍ [٤٧] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} -٥ & ٤ & ٢ \\ ١ & -٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٣ & -١ & ٦ \end{pmatrix}$

اوجد المصفوفة أ ب^{مد} + ب أ^{مد} واثبت أنها متماثلة

✍ [٤٨] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & -٣ & ٢ \\ -٢ & ٤ & -٣ \\ & ٢ & ١٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & -١ & ٣ \\ ٤ & -٥ & -١ \\ ٠ & ٤ & ٠ \end{pmatrix}$

حقق ان أ ب + ب أ مصفوفة متماثلة أ ب − ب أ مصفوفة شبه متماثلة

✍ [٤٩] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٤ \\ ٢ & -٤ & -١ \\ ٠ & ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٣ \\ ٥ & -١ & ١ \\ -٢ & ٤ & -٣ \end{pmatrix}$

اثبت ان : ب^{مد} أ ب مصفوفة متماثلة

✍ [٥٠] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$

فاثبت ان : ❶ أ^٢ = ٤ أ ، ب^٢ = ٤ ب ❷ أ^٢ + ب^٢ = ١٦ I ❸ أ^٢ ب^٢ = ☐

✍ [٥١] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$ اثبت ان ❶ أ^٣ = ٧ أ ❷ أ^٤ = ٧ أ^٢

✍ [٥٢] إذا كانت ت = $\sqrt{-١}$ ، أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ت \\ ت & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -ت & ٠ \\ ٠ & -ت \end{pmatrix}$

فاثبت ان أ^٢ ب^٢ = I

✍ [٥٣] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & -٤ \end{pmatrix}$

اثبت ان : (أ − ب)^٢ ≠ أ^٢ − ٢ أ ب + ب^٢

✍ [٥٤] إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$ اثبت بالتعويض المباشر أن $أ^٢ - أ - ٥ I = \square$

✍ [٥٥] إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}$ حقق أن $أ^٢ - ٦أ + ٩ I = (أ - ٣ I)^٢$

✍ [٥٦] إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ فاثبت أن $أ^٢ - ٤أ - ٥ I = \square$

✍ [٥٧] إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ -١ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & -١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ -١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

فاثبت ان $٣أ^٤ + ٢ب^٢ - ٥ I = \square$

✍ [٥٨] إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ فاوجد قيمة كل من $أ^٢$ ، $أ^٣$

ثم اثبت ان : $أ^٥ = أ^ن$

✍ [٥٩] إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$ اثبت ان $(أ^ن + ٥ أ^٢)^٣ = ٥$

✍ [٦٠] إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ اثبت ان المصفوفة س~ التى تحقق

العلاقة $أ س\sim = س\sim أ$ تكون بالصورة $\begin{pmatrix} ج & ب & أ \\ ب & أ & ج \\ أ & ج & ب \end{pmatrix}$

تمارين [٤] المحددات وحل المعادلات

[١] اوجد قيمة كل من المحددات الآتية

① $\begin{vmatrix} -٢ & ٦ \\ -٧ & ١٩ \end{vmatrix}$ ② $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix}$ ③ $\begin{vmatrix} ٥ & ٧ \\ ٢ & -٣ \end{vmatrix}$

④ $\begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix}$ ⑤ $\begin{vmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix}$ ⑥ $\begin{vmatrix} -٢ & -٤ \\ -١ & ١ \end{vmatrix}$

⑦ $\begin{vmatrix} -١ & ٣ \\ ٨ & ٥ \end{vmatrix}$ ⑧ $\begin{vmatrix} -٤ & -١ \\ ٠ & -٥ \end{vmatrix}$ ⑨ $\begin{vmatrix} -١٦ & ١٢ \\ ١٢ & -٩ \end{vmatrix}$

[٢] اوجد قيمة كل من المحددات الآتية

① $\begin{vmatrix} ٣ & ٤٢ & ٠ \\ ٧ & ١٨ & ٢ \\ ٣ & ٢٨ & ٠ \end{vmatrix}$ ② $\begin{vmatrix} -٣ & -٤ & ٣ \\ -٣١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ & ٥ \end{vmatrix}$ ③ $\begin{vmatrix} ٢٣ & ٣ & ١٣ \\ ٥ & ٧ & ٣ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

④ $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٤ & -١ \\ ٨ & ٧ & ٠ \end{vmatrix}$ ⑤ $\begin{vmatrix} ٠ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٤ & -١ \\ ٨ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ ⑥ $\begin{vmatrix} ٠ & ٥ & ٠ \\ ١ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٧ & ٠ \end{vmatrix}$

[٣] أوجد قيمة المحددات التالية :

① $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ + س} \\ \text{ب} & \text{ب + ص} \end{vmatrix}$ ② $\begin{vmatrix} \text{س}^٢ + ١ & \text{س} + ١ \\ \text{ص}^٢ + ١ & \text{ص} + ١ \end{vmatrix}$ ③ $\begin{vmatrix} \text{أ} - \text{ب} & \text{أ} + \text{ب} \\ \text{أ} & \text{أ} - \text{ب} \end{vmatrix}$

④ $\begin{vmatrix} \text{هـ} + ١ & \text{هـ} \\ \text{هـ} & \text{هـ} - ١ \end{vmatrix}$ ⑤ $\begin{vmatrix} ٢ & \text{س}^٢ \\ ١ & -\text{س} \end{vmatrix}$ ⑥ $\begin{vmatrix} ٠ & ٢\text{س} - ١ \\ \text{س} + ٢ & ٤ \end{vmatrix}$

[٤] أوجد قيمة المحددات التالية :

❶ $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{ت} \\ \text{ت} & \text{١} \end{vmatrix}$

❷ $\begin{vmatrix} \text{ظا}\,\theta & \text{قا}\,\theta \\ \text{قا}\,\theta & \text{ظا}\,\theta \end{vmatrix}$

❸ $\begin{vmatrix} -\text{ظا}\,\theta & \text{جتا}\,\theta \\ \text{قا}\,\theta & \text{ظتا}\,\theta \end{vmatrix}$

❹ $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{ظتا}\,\theta \\ \text{ظتا}\,\theta & \text{قتا}^{\text{٢}}\,\theta \end{vmatrix}$

❺ $\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ب} - \text{١} \\ \text{ب} + \text{١} & \text{ب} \end{vmatrix}$

❻ $\begin{vmatrix} \text{٠} & \text{جا}\,\theta \\ \text{قتا}\,\theta & \text{ظتا}\,\theta \end{vmatrix}$

❼ $\begin{vmatrix} -\text{جتا ٦٠}^\circ & \text{جتا ٣٠}^\circ \\ \text{جا ٦٠}^\circ & \text{جا ٣٠}^\circ \end{vmatrix}$

❽ $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{ت} - \text{١} \\ \text{ت} + \text{١} & \text{١} \end{vmatrix}$

❾ $\begin{vmatrix} \text{ظتا}\,\theta & \text{جتا}\,\theta \\ \text{قا}\,\theta & \text{ظا}\,\theta \end{vmatrix}$

[٥] أوجد إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ل} & \text{ع} \end{vmatrix} = \text{٤}$:

احسب قيمة كل من : ❶ $\begin{vmatrix} \text{٢ص} & \text{٣س} \\ \text{٢ل} & \text{٣ع} \end{vmatrix}$ ❷ $\begin{vmatrix} \text{٤ص} & \text{س} - \text{ص} \\ \text{٤ل} & \text{ع} - \text{ل} \end{vmatrix}$

[٦] أوجد إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ء} & \text{جـ} \end{vmatrix} = \text{٧}$:

احسب قيمة كل من : ❶ $\begin{vmatrix} \text{٢ب جـ} & \text{أ ء} \\ \text{٨} & \text{٤} \end{vmatrix}$ ❷ $\begin{vmatrix} \text{ء} + \text{جـ} & \text{٥ء} \\ \text{أ} + \text{ب} & \text{٥ب} \end{vmatrix}$

[٧] اثبت أن :

❶ $\begin{vmatrix} \text{جتا}\,\theta & \text{جا}\,\theta \\ \text{جا}\,\theta & -\text{جتا}\,\theta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -\text{١} & \text{ت} \\ -\text{ت} & \text{١} \end{vmatrix} = \text{٢}$

❷ $\begin{vmatrix} \text{٠} & \text{س} - \text{٢} \\ \text{س} + \text{٢} & \text{٤} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{س} - \text{٢} & \text{١} \\ \text{٣} - \text{س}^{\text{٢}} & \text{٠} \end{vmatrix} = -\text{١}$

[٨] حل المعادلات التالية :

❶ $\begin{vmatrix} \text{س} - ٣ & ١ \\ ١ & \text{س} + ٣ \end{vmatrix} = ٦$

❷ $\begin{vmatrix} \text{س} - ١ & ٢ \\ \text{س} - ١ & \text{س} + ٣ \end{vmatrix} = ٢٥$

❸ $\begin{vmatrix} ٢\text{س} - ١ & ٠ \\ ٤ & \text{س} + ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س}^٢ & ٢ \\ -\text{س} & ١ \end{vmatrix}$

❹ $\begin{vmatrix} ٣ & ٦ & ٠ \\ -١ & \text{س} & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٨ \end{vmatrix} = ٠$

❺ $\begin{vmatrix} \text{س}^٢ & \text{س} & ١ \\ -٤ & ٢ & ١ \\ ٩ & -٣ & ١ \end{vmatrix} = ٠$

❹ $\begin{vmatrix} \text{س} & ٠ & -\text{س}^٢ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ٠ & \text{س}^٢ \end{vmatrix} = ٠$

❺ $\begin{vmatrix} \text{س} - ١ & ١ & ٠ \\ ١ & \text{س} + ١ & -١ \\ ١ & ١ & \text{س} - ٢ \end{vmatrix} = ٠$

[٩] حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية بطريقة كرام :

❶ ٢س − ٣ص = ٥ ، ٣س + ٤ص = −١

❷ س + ص = ٥ ، ٢س + ٥ص = ١٦

❸ س + ٣ص = ٥ ، ٢س + ٥ص = ٨

❹ ٣س + ٢ص = ٥ ، ٢س + ص = ٣

❺ ٣س = ١ − ٤ص ، ٥س + ١٢ = ٧ص

❻ ٢س = ٣ + ٧ص ، ص = ٥ − س

[١٠] حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية بطريقة كرام :

❶ س + ص = ٤ ، ٢س − ص = ٢

❷ س + ص = ٣ ، س − ص = ١

❸ س = ٣ ، ٣س − ٥ص = ١

❹ ٣ص = ٦ ، س + ٦ص = ١٢

❺ ص = ٢س − ١ ، ٢ص + س = ٨

❻ س = ١ + ص ، س + ٢ص + ٥ = ٠

❼ س − ٢ص = ٧ ، ٢س + ص = ٤

❽ ٣ص − س = ٣ ، ص − ٣س + ٧ = ٠

[١١] حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية بطريقة كرام :

① ٢س + ص − ٢ع = ١٠	٣س + ٢ص + ٢ع = ١	٥س + ٤ص + ٣ع = ٤
② س + ٢ص − ٣ع = ٦	٤س + ٣ص − ٢ع = ١٤	٢س − ص − ٤ع = ٢
③ ص + ٢س + ٣ع = ٦	٢س − ص + ع = −٣	س − ٢ص + ٢ع = −١١
④ ٢س − ٣ص + ٥ع = ٧	٣س + ٤ص + ٢ع = ١١	س − ٢ص + ٧ع = ١٦
⑤ ٢س + ص − ع = −١	٢س − ص + ٤ع = ١	٥س − ٣ص + ٢ع = ٣
⑥ ٧س − ٢ص + ع = ٥	٦س + ٣ص − ٥ع = ٢	٥س + ٧ص − ٩ع = ١
⑦ س − ص − ع = ٠	٣س − ٤ص − ٢ع = −١	٨س − ١١ص + ٣ع = ٥
⑧ ٣س + ص − ٢ع = −٣	٢س + ٧ص + ٣ع = ٩	٤س − ٣ص − ع = ٧
⑨ ٢س + ص + ع = ٠	س − ص + ٥ع = ٠	ص − ع = ٤
⑩ ٣س + ٢ع = ٠	٤س + ٣ص − ٥	٥ص − ع = −٢

[١٢] اشترى فادى ٣ كشاكيل وكتابين بمبلغ ٨٥ جنيها واشترى كريم كشكولين و٤ كتب من الانواع نفسها بمبلغ ١١٠ جنيه استخدم طريقة كرام لإيجاد سعر كل من الكشكولين والكتاب

[١٣] زاويتان متكاملتان ضعف قياس أكبرهما يساوى سبعة أمثال قياس الصغرى . أوجد قياس كل زاوية باستخدام استخدم طريقة كرام .

[١٤] زاويتان حادتان فى مثلث قائم الزاوية الفرق بين قياسيهما ٥٠° أوجد قياس كل منهما باستخدام استخدم طريقة كرام .

[١٥] الربط بالهندسة اوجد مساحة سطح المثلث أ ب جـ الذى فيه

أ (٢ ، ٤) ، ب (−٢ ، ٤) ، جـ (٠ ، −٢)

[١٦] اوجد مساحة سطح المثلث س ص ع الذى فيه

س (٣ ، ٣) ، ص (−٤ ، ٢) ، ع (١ ، −٤)

[١٧] باستخدام المحددات اثبت أن النقط (٣ ، ٥) ، (٤ ، −١) ، (٥ ، ٧) **تقع على استقامة واحدة**

تمارين [٥] على المعكوس الضربى للمصفوفة

[١] عين نوع كل من المصفوفات الآتية من حيث كونها لها معكوس ضربى أم لا :

❶ $\begin{pmatrix} ١٥ & ٣ \\ ٨ & ٢ \end{pmatrix}$ ❷ $\begin{pmatrix} ٦ & ٤ \\ -٩ & -٦ \end{pmatrix}$ ❸ $\begin{pmatrix} ١٣ & -٨ \\ ٧ & -٥ \end{pmatrix}$ ❹ $\begin{pmatrix} -٥ & ٨ \\ -١٥ & ٢٤ \end{pmatrix}$

❺ $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٤ \\ ٠ & ١ & ٩ \\ ٧ & ٠ & -١ \end{pmatrix}$ ❻ $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ٠ \\ ١ & ١ & ٩ \\ ٧ & ٣ & -١ \end{pmatrix}$ ❼ $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ٠ & -١ \end{pmatrix}$

[٢] اوجد قيمة س التى تجعل كلا من المصفوفات الاتية ليس لها معكوس ضربى :

❶ $\begin{pmatrix} -٣ & ٣س \\ ٢ - س & ٣ \end{pmatrix}$ ❷ $\begin{pmatrix} س - ٤ & ٢س \\ س + ١ & -٣ \end{pmatrix}$

$[(٣ ، -١) ، (-\frac{٣}{٢} ، -٤)]$

[٣] اوجد المعكوس الضربى لكل من المصفوفات الآتية إن أمكن :

❶ $\begin{pmatrix} ٧ & ٣ \\ -٩ & -١ \end{pmatrix}$ ❷ $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ ❸ $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$ ❹ $\begin{pmatrix} ١ & ت \\ ت & ١ \end{pmatrix}$

❶ $\begin{pmatrix} -١ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ ❷ $\begin{pmatrix} -٩ & -٧ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ ❸ $\begin{pmatrix} -ظا\theta & جتا\theta \\ قا\theta & ظتا\theta \end{pmatrix}$ ❹ $\begin{pmatrix} -ظا\theta & جتا\theta \\ قا\theta & ظتا\theta \end{pmatrix}$

[٤] باستخدام طريقة كرامر اوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الاتية :

❶ ٣س + ص = ٣ ، س − ٣ص = ١١
❷ ٢س + ٥ص = ١٣ ، ٣س − ص = −٦
❸ ٧س − ٣ص = ١٧ ، س − ٥ص = ٧
❹ ٣س − ٤ص = ١٥ ، ٢س − ٥ص = ١
❺ ٧س − ٣ص = ١٥ ، ٥س + ٢ص = ١٩
❻ س + ٢ص = ١٢ ، ٣س − ص = ١

[٥] الربط بالهندسة يمر المنحنى ص = أ $س^{٢}$ + ب س بالنقطتين (٢ ، ٠) ، (٤ ، ٨)

استخدم المصفوفات لايجاد الثابتين أ ، ب

[٥] باستخدام المصفوفات اوجد عددين مجموعهما ١٠ والفرق بينهما ٤

[٦] الربط بالمستهلك اشترت أمل ٨كجم من الدقيق ، ٢كجم من الزبد بمبلغ ١٤٠ جنيها واشترت صديقتها ريم ٤ كيلو جرامات من الدقيق ٣ كيلو جرامات من الزبد بمبلغ ١٧٠ جنيها استخدم المصفوفات في إيجاد سعر الكيلو جرام الواحد من كلا النوعين

[٧] مستطيل محيطه ٣٢ سم ، وإذا نقص طوله ١سم ، وزاد عرضه ٣ سم صار مربعا باستخدام المصفوفات أوجد مساحة المربع باستخدام استخدم طريقة كرامر .

[٨] تتحرك نقطة على مستقيم : ٥ س – ٢ ص = ١ بحيث إحداثيها الصادى ضعف مربع إحداثيها السينى أوجد احداثيا هذه النقطة باستخدام المصفوفات.

[٩] اذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ١٠ & ٩ \end{pmatrix}$ ، ب= $\begin{pmatrix} -٧ & -٧ \\ ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

فاوجد حاصل أ ب لماذا لا تكون الوصفوفة أ هى المعكوس الضربى للمصفوفة ب

[أ ب = I ، ب غير مربعة]

[١٠] اذا كان أ = $\begin{pmatrix} جتا س & - جا س \\ جا س & جتا س \end{pmatrix}$ اوجد أ أ^{مد} ومن ثم او باى طريقة اخرى اوجد أ$^{-١}$

[أ^{مد}]

[١١] اثبت ان المصفوفة $\begin{pmatrix} جتا θ & - جا θ & ٠ \\ جا θ & جتا θ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ لها معكوس ضربى ثم أوجده

[١٢] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٩ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٤ & ٨ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$

حقق ان (أ + ب)$^{-١}$ ≠ أ$^{-١}$ + ب$^{-١}$



[١٣] إذا كانت س = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٦ & ٩ \end{pmatrix}$

حقق ان $(\text{س ص})^{-١} = \text{ص}^{-١}\ \text{س}^{-١}$

[١٤] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ١ \\ ٦ & ١ \end{pmatrix}$ حقق ان : $(\text{أ}^{ن})^{-١} = (\text{أ}^{-١})^{ن}$

[١٥] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -١ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ ٢ & -٤ \end{pmatrix}$

حقق أن : $(\text{أ ب ج})^{-١} = \text{ج}^{-١}\ \text{ب}^{-١}\ \text{أ}^{-١}$

[١٦] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٩ & ٤ \\ ١٥ & ٦ \end{pmatrix}$ اثبت أن أ لها معكوس ضربى

واوجد $\text{أ}^{-١}$ ثم استخدم ذلك فى ايجاد المصفوفة ج حيث أ ج = ب

[١٧] إذا كانت $\text{أ}^{-١}$ = $\begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٥ & -٣ \end{pmatrix}$ ، أب = $\begin{pmatrix} ١٧ & ٨ \\ ١١ & ٥ \end{pmatrix}$ اوجد كلا من ب ، $\text{ب}^{-١}$

[١٨] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -٣ & -٤ \end{pmatrix}$ ، $(\text{أ ب})^{-١}$ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix}$

اوجد كلا من $\text{ب}^{-١}$ ، ب

[١٩] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٧ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

حل المعادلة المصفوفة س أ = ب

[٢٠] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

اوجد المصفوفة س التى تحقق المعادلة أ س + ب = ج^{مد}

[٢١] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

اوجد المصفوفة س التى تحقق ان س + ٢ أ$^{-1}$ ب$^{-1}$ = (ب أ)^{مد}

[٢٢] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

اوجد المصفوفة س التى تحقق ان أ س + ب س − ٣ ج = □

[٢٣] اذا كانت أ = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

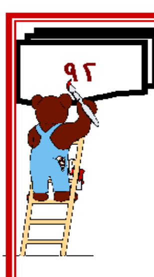
حل المعادلة المصفوفة أ^{2} س = ٢ب − ٣ I

[٢٤] اذا كانت أ = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ فاثبت ان : أ^{2} − ٥أ + I = □ ومنها احسب أ$^{-1}$

[٢٥] اذا كانت أ = $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ اثبت ان أ^{2} − ٦أ + ١٣ I = □ ومنه احسب أ$^{-1}$

[٢٦] اذا كانت أ = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

اثبت ان (أ ب)^{2} − ٥ أ ب + ٤ I = □ ومنها احسب (أ ب)$^{-1}$



✍ [٢٧] اذا كانت أ = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

اوجد المصفوفة س التى تحقق العلاقة أ س أ$^{-1}$ = ب

✍ [٢٨] اذا كانت أ = $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

اوجد المصفوفة س التى تحقق العلاقة : أ س ب = I حيث I مصفوفة الوحدة ثم

بين ان المصفوفة س متماثلة ، المصفوفة (س^{2} + ج) شبه متماثلة

✍ [٢٩] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ ، س = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

اثبت أن المصفوفة س$^{-1}$ أ س مصفوفة قطرية اثبت كذلك أن المصفوفة س$^{-1}$ أ^{2ن} س

هى قطرية أيضا حيث ن عدد صحيح موجب ومن ثم اوجد أ^{7}

✍ [٣٠] إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

اوجد المصفوفة س التى تحقق المعادلة : ٣ أ س + ٢ ب^{مد} = ٢ ب س + ٣ أ$^{-1}$

تمارين [٦] على حل متباينات الأولى فى مجهول واحد

[١] أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ مجموعة حل المتباينة : س < ٣ فى ح هى ....

① { ٣ } ②] ٣ ، ∞] ③ [٣ ، ∞] ④ [−∞ ، ٣]

❷ مجموعة حل المتباينة : − س > ٥ فى ح هى ....

① [−٥ ، ∞] ②] ٥ ، ∞] ③ [٥ ، ∞] ④ [−∞ ، ٥]

❸ مجموعة حل المتباينة : − ٤س ≤ ٨ فى ح هى ....

①] −٢ ، ∞] ②] −٢ ، ∞] ③ [−٢ ، ∞] ④ [−∞ ، −٢]

❹ مجموعة حل المتباينة : ٢س − ١ ≥ ٣ فى ح هى ....

①] ٢ ، ∞] ②] ٢ ، ∞] ③ [−∞ ، ٢] ④ [−∞ ، ٢]

❺ مجموعة حل المتباينة ٢س + ٣ ≥ س − ٤ فى ح هى ....

①] −٧ ، ∞] ② [−∞ ، −٧] ③ { −٧ } ④ { ٢ }

❻ مجموعة حل المتباينة : −١ ≥ ٢س − ٥ ≥ ٣ فى ح هى ....

① [−١ ، ٣] ② [٢ ، ٤] ③ [٢ ، ٤] ④ [−٣ ، −١]

❼ مجموعة حل المتباينة : ٦ ≤ ٢س < ٢ فى ح هى ....

① [١ ، ٣ [②] ١ ، ٣] ③ [١ ، ٣] ④] ١ ، ٣]

[٢] أكمل مكان النقط بالإجابة المناسبة فى كل مما يأتى :

❶ مجموعة حل المتباينة س < ١ هى ....

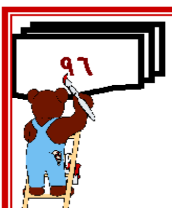
❷ إذا كانت −٢س ≤ ٤ فان مجموعة حلها فى ح هى ....

❸ مجموعة حل المتباينة −١ < − س < ٥ فى ح هى ....

❹ مجموعة حل المتباينة ٣س + ٧ ≤ ٥س −١ فى ح هى ....

❺ إذا كانت [−١ ، ٧] هى مجموعة حل المتباينة أ ≥ س − ٢ > ب فان أ = ... ، ب = ...

❻ إذا كانت س ∈ ح ، ٥ ≥ س + ٢ > ٧ فان س ∈ للفترة



٧ إذا كانت [−١ ، ٢] هى مجموعة حل المتباينة أ ≤ س < ٢ فان أ = ...

٨ مجموعة حل المتباينة ٣ > ١ − س ≥ −٤ فى ح هى

٩ إذا كانت س ∈ [١ ، ٣] فان ٢س + ١ ∈ للفترة

١٠ إذا كانت ٤س + ١ ∈ [−٣ ، ٥] فان س ∈ ....

[٣] حل المتباينات الاتية في ح ومثل مجموعة الحل بيانيا على خط الاعداد

١ ٣س + ٥ ≥ ٢

٢ ٢ < س − ١ < ٥

٧ ٤س − ٧ ≥ ٥س + ٣

١٨ ٢ (س + ٢) ≥ ٥س − ٢

٨ ١ − ٣س > ٤ − ٤س

١٩ س − ١ ≤ ٣ − ٢س

٩ (١/٢) س + ١ ≤ ٢س

٢٠ (٢/٣) س − ٥ ≥ (س/٢) + ١

١٠ (٤س + ١٣)/٥ ≤ (١ − س)/٣

٢١ (٥س − ٢٠)/٢ < ١ − ٣س

[٤] أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية فى ح على صورة فترة ومثلها على خط الأعداد :

١ س ≤ ٣س + ٢ ≤ ٤ + س

٦ ٢ + س < ٣س + ٢ < ١٠ + س

٢ ١١ + ٣س ≤ ٥س + ٧ < ١٩ + ٣س

٧ ١ + س ≤ ٣ ≤ ٦ + س

٣ ٢ − ٢س < ٤ ≤ ٦ − ٢س

٨ −س + ١ ≤ ٣س − ٣ ≤ س + ٥

٤ س − ٣ < ٢س − ١ ≤ ٣س + ١

٩ س + ٧ > ١ − ٢س ≥ −س − ٨

٥ ٢س − ٧ ≥ ٥ − س > ٢س + ٢

١٠ ٢س ≤ ٣ − س < ٩ + س

١١ ٣ + ٢س < ٣س + ٢ ≤ س + ٧

Mr : Walid Rushdy
01112467874 01062220750

تمارين [٨] على حل متباينتين فى متغيرين بيانيا

س١ اوجد بيانيا مجموعة حل كل من أزواج المتباينات الآتية

- (١) ١− ⩾ س ، ٢ > ص
- (٢) ٣ > س ، ١ ⩽ ص
- (٣) ٢ ⩾ س ، ٣ < ص + س
- (٤) ١ < ص ، ٢ > ص − س
- (٥) ٢ ⩾ ص − س ، ١ < ص + س
- (٦) ص > س ، ١ ⩽ ص − س
- (٧) ١ > س − ص ، ١٥ ⩾ ص٥ + س٣
- (٨) ١ + س > ص ، ١ ⩽ س − ص
- (٩) ٢ ⩾ ص٢ + س ، ٤ < ص + س٢
- (١٠) ٠ < ص٢− س٣ ، ٥ ⩾ ص − س٥

س٢ اوجد مجموعة حل من التباينات الآتية بيانيا

- (١) ٠ < س ، ٠ ⩽ ص ، ٣ ⩽ ص + س
- (٢) ٠ > س ، ٠ ⩽ ص ، ٢ > ص٢ + س
- (٣) ١ < س ، ٣ ⩾ ص ، ٣ > ص + س
- (٤) ٢ ⩾ س ، ١− ⩽ ص ، صفر > ص٣ + س٢
- (٥) ١ ⩾ س ، ٠ ⩽ ص ، ٤ ⩾ ص٢ + س
- (٦) ٠ < س ، ٢ ⩽ ص ، ٤ > ص + س
- (٧) ١ ⩽ ص٤ + س ، ٢ ⩾ س٤− ص ، ٣ > ص + س
- (٨) ١ ⩾ س ، ٤ > ص + س٢ ، ٠ ⩽ ص
- (٩) صفر ⩽ ص ، ٩ ⩾ س٣ + ص ، ١ > س − ص

س٢ اوجد مجموعة حل من التباينات الآتية بيانيا

- (١٠) ٠ < س ، ٠ ⩽ ص ، ٢ ⩽ ص + س ، ٤ ⩽ ص٢− س
- (١١) ٠ ⩾ س ، ٠ ⩾ ص ، ٢ > ص − س ، ٤ ⩾ ص − س٢
- (١٢) ٢ > س ، ٦ > ص٣ + س٢ ، ٢ > ص + س ، ٣− < ص
- (١٣) ٠ ⩾ س ، ٢ ⩾ ص ، ٠ > ٢− ص + س ، ٠ > ٦− ص٣ + س٢−
- (٣) ٠ ⩾ س ، ٤ < ص٤ + س ، ٢ > ص + س٤ ، ١ > ص − س

تمارين [٩] على البرمجة الخطية

✍ **[١] عين مجموعة حل المتباينات الآتية معا بيانيا**

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ص ≤ ٨ ، ٣س + ٢ص ≤ ١٢ **اوجد من مجموعة الحل**

قيم (س ، ص) **بحيث يكون المقدار** ل = ٣٠س + ٢٠ص **اكبر ما يمكن**

✍ **[٢] عين مجموعة حل التباينات الآتية معا بيانيا**

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٥س + ص ≤ ١٠ ، س + ص ≤ ٦ **ثم اوجد من مجموعة الحل قيم**

(س ، ص) **التى تجعل** ل **اكبر ما يمكن حيث** ل = ٣س + ٢ص

✍ **[٣] اوجد مجموعة حل المتباينات الآتية معا**

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ص ≤ ١١ ، ٢س + ص ≤ ١٦ **ثم اوجد من مجموعة الحل**

قيم (س ، ص) **التى تجعل** (ل) **اقل ما يمكن حيث** ل = ٣٠س + ٥٠ص

✍ **[٤]** س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٦٠ ، س + ٥ص < ١٠٠ **ثم اوجد من**

مجموعة الحل قيم (س ، ص) **التى تجعل** ل **اكبر ما يمكن حيث** ل = ٢٥س + ٧٥ص

✍ **[٥]** س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ص ≤ ٨ ، ٣س + ص ≤ ٩ **ثم اوجد**

من مجموعة الحل قيم (س ، ص) **التى تجعل** ل **اكبر ما يمكن حيث** ل = ١٠س + ١٥ص

✍ **[٦]** ترزى لديه ٨٠ متر من القطن ١٢٠ متر من الصوف ينتج نوعين من الثياب بحيث يلزم لعمل ثوب من النوع الأول متر واحد من القطن ٣ أمتار من الصوف والنوع الثانى يلزم متران من كل من القطن والصوف وكان ثمن الثوب من النوع الأول ٤٠ جنيها ومنه النوع الثانى ٣٠ جنيها فاوجد عدد الثياب من كل نوع التى يجب أن ينتجها الترزى ليكون دخله أكبر ما يمكن [(٤٠ ، ٠)]

✍ [٧] يراد وضع نوعين من الكتب أ ، ب على رف مكتبة طوله ١٠٠ سم وحمولته القصوى ٢٥ كجم فإذا كان وزن الكتاب من كلا من النوعين هو ١ كجم وسمك الكتاب من النوع الأول ٤ كجم النوع الثانى ٦سم فاوجد عدد الكتب من كل نوع التى توضع على الرف بحيث يكون عددها أكبر ما يمكن

✍ [٨] ينتج مصنع نوعين من النجف أ ، ب وكل نجفة يقوم بتجميعها كهربائى ثم يقوم عامل بدهانها بالبرنز ويأخذ الكهربائى ساعة لتجميع النموذج أ ساعتين لتجميع النموذج ب أما عامل الدهان فيأخذ ٣ ساعات لدهان النموذج أ ساعة لدهان النموذج ب ويعمل كل من الكهربائى ورجل الدهان ٦ ساعات يوميا فإذا كان المصنع يكسب ٢٠ جنيها من بيع الوحدة من النموذج أ ، ٣٠ جنيها من بيع الوحدة من النموذج ب وكان المصنع يبيع كل إنتاجه اليومى فكم عدد النجف الذى يمكن إنتاجه فى اليوم ليعطيه أكبر ربح ممكن [(٠،٣٠)]

✍ [٩] ينتج احد المصانع الحربية نوعين من المراوح الكهربية أ ، ب ويتطلب كل نوع إجراء عمليات تصنيفية أولا ثم عمليات تجميع ثانيا فإذا كانت الوحدة من المنتج تتطلب ٤ ساعات للتصنيع وساعة واحدة للتجميع والوحدة من المنتج ب تتطلب ٨ ساعات للتصنيع وساعة واحدة للتجميع وكان الربح لكل من أ ، ب هو ٦ جنيهات ، ٤ جنيهات بالترتيب اوجد عدد الوحدات المنتجة أسبوعيا من كل من أ ، ب ليكون ربح المصنع أكبر ما يمكن علما بان الساعات المتاحة للتصنيع أسبوعيا ٦٤٠٠ ساعة بينما ساعات التجميع ١٠٠٠ ساعة [(١٠٠٠،٠)]

✍ [١٠] طائرة بها مقاعد للركاب فإذا كان راكبى الدراجة الاولى يسمح له بحمل ٦٠ كجم من الأمتعة ويدفع اجر ٥٠٠٠ جنيه لنظير رحلة معينة وراكبى الدراجة السياحية يسمح له بحمل ٢٠ كجم من الأمتعة ويدفع اجر ٢٥٠٠ جنيها لنفس الرحلة فإذا كان أكبر وزن للأمتعة على الطائرة هو ١٢٠ كجم فاوجد عدد ركاب كل درجة الذى يحقق أكبر دخل من الأجور

✍ [١١] مصنع ينتج نوعين من الصابون أ ، ب فإذا كان إنتاج ما قيمته ١٠٠ جنيه من المنتج أ يحتاج إلى ٣٠كجم من المواد الخام ١٨ ساعة من التشغيل على الماكينات وإنتاج ما قيمته ١٠٠ جنيه من المنتج ب يحتاج إلى ٢٠ كجم من نفس المواد الخام ٢٤ ساعة من التشغيل على الماكينات اوجد أكبر قيمة للمنتجات التى تنتج ٧٥ كجم من المواد الخام ٧٢ ساعة من التشغيل على الماكينات

[١٢] ترزيان ينتجان نموذجين من البلوزات (أ) ، (ب) فيقوم الترزى الأول بتفصيل القماش بينما يقوم الثانى بخياطته فإذا كان الترزى يستغرق ساعة فى تفصيل النموذج (أ) وساعتين فى تفصيل النموذج (ب) وكان الترزى الثانى يستغرق ٣ ساعات لخياطة النموذج (أ) وساعة واحدة لخياطة النموذج (ب) وكان الترزى الأول يعمل فى اليوم ٨ ساعات على الأكثر بينما يعمل الثانى ٩ ساعات فى اليوم على الأكثر وكان مكسبهما من بيع البلوزة من النموذج (أ) هو ١٠ جنيهات ومكسبها من بيع البلوزة من النموذج (ب) هو ١٥ جنيها فاوجد عدد البلوزات من كل نموذج التى يمكنهما إنتاجه فى اليوم ليحصلا على أكبر ربح ممكن [٢،٣]

[١٣] سلعتان غذائيتان الأولى بها ٥ وحدات فيتامين وتعطى ٣ سعر حرارى والثانية بها وحدتان فيتامين وتعطى ٦ سعر حرارى فإذا كان المطلوب ٣٥ وحدة فيتامين على الأقل ٣٩ سعر حرارى على الأقل وكان ثمن الوحدة من السلعة الأولى ٦ قروش وثمن الوحدة من السلعة الثانية ٨ قروش فما هى الكمية الواجب شراؤها من كل من السلعتين لتحقيق المطلوب بأقل تكلفة [٣،٥]

[١٤] ينتج مصنع رولات ورق الحائط وعلب الغراء اللازم للصقه فإذا كان إنتاج كل ١٠٠ رول ورق يكلف المصنع ١٥٠٠ جنيه ويتطلب ١٢ ساعة عمل على ماكينة واحدة وإنتاج كل ١٠٠ علبة غراء يكلف المصنع ٢٠٠٠ جنيه ويتطلب ٨ ساعات عمل على ماكينة واحدة وعلمت أن المصنع يعمل أسبوعيا بطاقة تشغيل إجمالية للماكينات ٣٦٠ ساعة ويرصد مبلغ ٦٠٠٠٠ جنيه للتكاليف اللازمة ويقدر ربح قدره ٣٠٠ جنيه لكل ١٠٠ رول ورق وكذا ٣٠٠ جنيه لكل ١٠٠ علبة غراء فما هو الإنتاج الأسبوعى من كل نوع الذى يضمن للمصنع أكبر ربح ممكن [٢٠٠٠،١٥٠٠]

[١٥] مصنع صغير لعمل الملابس الجاهزة ينتج نوعين من الثياب ويلزم لعمل النوع الأول متران من الحرير ومتر واحد من القطن ويلزم لعمل النوع الثانى متر من الحرير ومتران من القطن وكان لدى المصنع ٧ أمتار من الحرير ، ٨ أمتار من القطن فإذا كان ثمن بيع الثوب من النوع الأول ١٠ جنيهات وثمن بيع الثوب من النوع الثانى ٨ جنيهات فما عدد الأثواب التى يجب أن ينتجها المصنع من كل نوع ليحصل على أكبر دخل ممكن هل يتبقى فى المصنع بعد هذا الإنتاج شئ من الحرير أو القطن [٢ ، ٣ ، لا يتبقى شئ]

[١٦] تنتج إحدى ورش الأثاث نوعين من المكاتب احدهما فاخر والآخر اقتصادى وكل منهما يلزم تشغيل نوعين من الماكينات (أ) ، (ب) فإذا كان إنتاج المكتب من النوع الفاخر يقتضى تشغيل الماكينة (أ) لمدة ثلاث ساعات والماكينة (ب) لمدة ساعتين والنوع الاقتصادى يقتضى تشغيل الماكينة (أ) لمدة ساعتين والماكينة (ب) لمدة ثلاث ساعات والمصنع يربح ٢٠ جنيها فى المكتب الفاخر ، ١٢ جنيها فى المكتب الاقتصادى فاوجد عدد المكاتب التى ينتجها المصنع من كل نوع حتى يحقق أكبر ربح ممكن علما بان المصنع لا يعمل أكثر من ١٥ ساعة كل يوم [٥ مكاتب فاخرة]

[١٧] يرغب مزارع فى تربية دجاج وبط فإذا كان المكان الذى سيربى فيه هذه الطيور لا يتسع إلا ٤٠٠ فقط من الطيور وهو يرى ألا يقل عدد الدجاج عن ٣ أمثال عدد البط فإذا كان ربحه فى كل دجاجة جنيها واحدا وفى كل بطة جنيهين اوجد عدد ما يربيه المزارع من كل نوع حتى يحصل على أكبر ربح ممكن

[١٨] يقوم مصنع بعمل نوعين مختلفين من السبائك المكونة من خليط من الحديد والزهر بحيث يتكون النوع الأول من ٢ كجم من الحديد ، ٢ كجم من الزهر ويتكون النوع الثانى من ١ كجم من الحديد و ٣ كجم من الزهر فإذا كانت الكمية المتاحة فى المصنع من الحديد ١٠ كجم ومن الزهر ١٨ كجم وكان سعر بيع السبيكة من النوع الأول ١٥ جنيها وسعر بيع السبيكة من النوع الثانى ١٠ جنيهات فما عدد السبائك التى ينتجها المصنع من كل نوع ليحقق أكبر دخل ممكن [٣ ، ٤]

[١٩] جراج للسيارات مساحته ٦٠٠ متر مربع فإذا علم أن سيارة الركوب الصغيرة تحتاج فى التوسط لمساحة ٦ متر مربع وان الأتوبيس يحتاج فى التوسط لمساحة ٣٠ مترا مربعا فاوجد عدد سيارات الركوب وعدد سيارات الأتوبيس التى تحقق أكبر دخل شهرى إذا علم أن سيارة الركوب تدفع ٢٥ جنيها فى الشهر والأتوبيس يدفع ٧٥ جنيها فى الشهر وان أكبر عدد من سيارات الركوب والأتوبيسات يمكن استقباله فى الجراج هو ٦٠ عربة [٥٠، ١٠]

[٢٠] طائرة بها ٤٠ مقعدا للركاب فإذا كان راكب الدرجة الأولى يسمح له بحمل ٦٠ كجم من الأمتعة ويدفع اجر ٥٠٠ جنيه نظير رحلة معينة وراكب الدرجة السياحة يسمح له بحمل ٢٠ كجم من الأمتعة ويدفع اجر ٢٥٠ جنيها لنفس الرحلة فإذا كان أكبر وزن للأمتعة على الطائرة هو ١٠٠٠ كجم فاوجد عدد ركاب كل درجة الذى يحقق أكبر دخل من الأجور [٥، ٣٥]

[٢١] مصنع ينتج من الصابون م ، ب فإذا كان إنتاج ما قيمته ١٠٠ جنيه من المنتج م يحتاج إلى ٣٠ كجم من المواد الخام ١٨ ساعة من التشغيل على الماكينات وإنتاج ما قيمته ١٠٠ جنيه من المنتج ب يحتاج إلى ٢٠ كجم من نفس المواد الخام ٢٤ ساعة من التشغيل على الماكينات اوجد أكبر قيمة للمنتجات من ٧٥ كجم من المواد الخام ٧٢ ساعة من التشغيل على الماكينات [٣٢٥]

[٢٢] يقوم احد المصانع بتقديم وجبة جافة للعمال مكونة من صنفين من الأغذية فإذا كانت كل قطعة من الصنف الأول تحتوى على وحدتين من فيتامين م ، ٦ وحدات من فيتامين ب بينما كل قطعة من الصنف الثانى تحتوى على ٦ وحدات من فيتامين م وثمانية وحدات من فيتامين ب فإذا كان احتياج العامل أن يحصل على ٩ وحدات من فيتامين م ، ١٨ وحدة من فيتامين ب وإذا علم أن ثمن القطعة من الصنف الأول ١,٢٥ جنيها ومن الصنف الثانى ٢ جنيه فما هو وزن كل من الصنفين لكى نحصل على ارخص وجبة ونضمن الحد الأدنى من الفيتامينات إذا كان وزن القطعة من أى الصنفين ٥٠ جراما [٩٠ ، ٤٥]

[٢٣] تشترى أسرة نوع من اللحم يحتوى على ٩٠ ٪ من اللحم غير الدهنى ، ١٠ ٪ من الدهن بسعر ٣٠ جنيها للكيلو جرام ونوع آخر من اللحم يحتوى على ٧٠ ٪ من اللحم غير دهنى ٣٠ ٪ من الدهن بسعر ٢١ جنيها للكيلو جرام فإذا كانت احتياجات الأسرة الأسبوعية هى على الأقل ٦ كيلو جرامات من اللحم غير الدهنى ٢ كيلو جرام على الأقل من الدهن اوجد كمية اللحم من كلا النوعين التى تشتريها الأسرة أسبوعيا حتى تكون تكاليف الشراء اقل ما يمكن [٦٠/٧ كجم من النوع الثانى]

[٢٤] شركة تنتج سلعتين (م) ، (ب) وكل من السلعتين تحتاج لإنتاجها ثلاثة آلات وبافتراض أن الوحدة من السلعة (م) تحتاج ٢ ساعة من الآلة الأولى وساعة من الآلة الثانية وساعة واحدة من الآلة الثالثة وبافتراض أن الوحدة الواحدة من السلعة (ب) تحتاج ساعة واحدة من الآلة الأولى و٢ ساعة من الآلة الثانية وساعة واحدة من الآلة الثالثة وبافتراض أن الحد الأقصى لساعات تشتغل كل آلة فى الشهر ١٨٠ ساعة للآلة الأولى ١٦٠ ساعة للآلة الثانية ١٠٠ ساعة للآلة الثالثة وبافتراض أن الشركة تستطيع بيع جميع الوحدات المنتجة شهريا من السلعتين وان ربحية الواحدة من (م) ٧٠ جنيها وان ربحية الوحدة من (ب) ١٠٠ جنيه اوجد كم وحدة من كل من السلعتين ينبغى إنتاجها وبيعها شهريا حتى يكون الربح أكبر ما يمكن [٤٠ ، ٦٠]

[٢٥] يتكون غداء الحيوانات فى إحدى المزارع من نوعين من العلف (أ) ، (ب) فإذا كانت الوحدة من النوع (أ) تحتوى على ٢٠ جرام بروتين ، ٢٠ جرام كربوهيدرات ١ جرام دهون والوحدة من النوع (ب) تحتوى على ١٠ جرام بروتين ، ٢٠ جرام كربوهيدرات ، ٢ جرام دهون وكان ثمن الوحدة من نوع (أ) هو ٤٠ قرشا وثمن الوحدة من النوع (ب) هو ٣٠ قرشا فإذا أريد الحصول على كمية من الغذاء بها ٢٠٠ جرام بروتين ، ٣٦٠ جرام كربوهيدرات ، ٣٠جرام دهون على الأقل بأقل تكلفة ممكنة فما هى عدد الوحدات اللازمة من كل نوعى العلف (أ) ، (ب) [٢ ، ١٦]

[٢٦] ورشة لصناعة الأثاث تتسع لعمل ٧٢ عاملا على الأكثر بعضهم مدرب والبعض الآخر تحت التدريب فإذا كان يفرض على كل عاملين مدربين بان يعمل معهما على الأقل عامل واحد غير مدرب وإذا كان حجم إنتاج العامل المدرب مرتين ونصف من حجم إنتاج العامل غير المدرب فاوجد عدد العمال من كل نوع لكى يتحقق للورشة أكبر حجم إنتاج ممكن [٤٨ ، ٢٤]

[٢٧] يوسف وسامى يعملان على إحدى الماكينات لإنتاج منتج معين فإذا كان يوسف ينتج وحدة المنتج فى الساعة بينما سامى ينتج وحدتين من هذا المنتج فى الساعة ولكنه يمكنه العمل ساعتين على الأكثر فى اليوم زيادة عن ساعات عمل يوسف وإذا علمنا أن الماكينة يجب أن تعمل ٦ ساعات على الأقل يوميا لتغطية نفقاتها وانه يجب إنتاج ٨ وحدات من المنتج على الأقل يوميا فاوجد اقل أجور يومية تدفع ليوسف وسامى إذا علم أن يوسف يحصل على ٥ جنيهات اجر فى الساعة وسامى يحصل على ٨ جنيهات اجر فى الساعة [٢٠ ، ١٦]

[٢٨] يراد وضع نوعين من الكتب (أ) ، (ب) على رف مكتبة طوله ٩٦ سم وحمولته القصوى ٢٠ كجم فإذا كان وزن الكتاب من كلا النوعين هو ١ كجم وسمك الكتاب من النوع (أ) ٦ سم ومن النوع (ب) ٤ سم فاوجد عدد الكتب من كل نوع التى توضع على الرف بحيث يكون عددها أكبر ما يمكن فسر وجود عدة حلول

[٢٩] مصنع صغير به ١٢ آلة ٢٠ عاملا وكان المصنع ينتج نوعان من السلع فإذا كان إنتاج الوحدة من السلعة (أ) تحتاج إلى آلة واحدة عاملين وإنتاج السلعة (ب) تحتاج إلى ٣ آلات وعاملين وان سعر بيع الواحدة من السلعة (أ) هو ١٠ جنيه وثمن بين الوحدة من السلعة (ب) هو ٢٠ جنيه المطلوب تحديد الإنتاج الأمثل لهذا المصنع لتحقيق أعلى إيراد ممكن

[٣٠] مصنع للسيارات يستخدم خطين للإنتاج أ ، ب وكان إنتاج السيارة الواحدة من النوع الصغير يقتضى تشغيل خط الإنتاج أ لمدة ساعتين وخط الإنتاج ب لمدة ٤ ساعات أما إنتاج السيارة الواحدة من النوع الكبير يقتضى تشغيل خط الإنتاج لمدة ٤ ساعات وخط الإنتاج ب لمدة ساعتين فإذا علم أن أقصى زمن ممكن للتشغيل ١٨ ساعة يوميا وربح المصنع من السيارة الصغيرة ٢٥٠٠ جنيه والكبيرة ٢٠٠٠جنيه فما عدد السيارات التى ينتجها المصنع يوميا لتحقيق أكبر ربح

[٣١] سلعتان غذائيتان تحتوى الوحدة من السلعة الأولى على ٤ وحدات فيتامين وتعطى ٣ سعرات حرارية وثمن الوحدة من هذه السلعة ٦ جنيهات وتحتوى الوحدة من السلعة الثانية على وحدتين فيتامين وتعطى ٦ سعرات حرارية وثمن الوحدة من هذه السلعة ٨ جنيهات فإذا كان المطلوب ٢٤ وحدة فيتامين على الأقل ٣٦ سعرا حراريا على الأقل فما هى الكمية المطلوب شراؤها من كل من السلعتين لتحقيق المطلوب بأقل تكلفة

[٣٢] ينتج احد المصانع نوعين من الدرجات مستخدما فى ذلك ماكينتان مختلفتان فإذا كان إنتاج دراجة من النوع الأول يلزم تشغيل الماكينة (أ) لمدة ساعتان وتشغيل الماكينة (ب) لمدة ٤ ساعات وإنتاج دراجة من النوع الثانى يلزم تشغيل الماكينة (أ) لمدة ٤ ساعات والماكينة (ب) لمدة ساعتان فإذا كان المصنع لا يعمل أكثر من ١٨ ساعة فى اليوم وكان ربح الدراجة الواحدة من النوع الأول ٢٥ جنيه وربح الدراجة من النوع الثانى ٢٠ جنيه ما عدد الدرجات التى يجب إنتاجها يوميا من كل نوع ليحقق أعلى ربح

[٣٣] مصنع للأبواب والشبابيك يستخدم فى صناعتها آلتين أ ، ب فإذا كان إنتاج الباب الواحد يلزم تشغيل الماكينة أ لمدة ساعتين والماكينة ب لمدة ساعة واحدة وإنتاج الشباك الواحد يلزم تشغيل الماكينة أ لمدة ساعتين والماكينة ب لمدة ٣ ساعات والماكينة أ ١٦ ساعة يوميا والماكينة ب لمدة ١٢ ساعة يوميا ويربح المصنع ٣٥ جنيها من بيع الباب الواحد ٤٠ جنيها فى الشباك الواحد اوجد عدد الأبواب والشبابيك التى يمكن أن ينتجها المصنع يوميا لتحقيق أكبر ربح [٦ابواب ، شباكين]

[٣٤] مصنع للسيارات ينتج نوعين من السيارات وقد خصص الصالة (أ) لعمليات تصنيع السيارة الأساسية والصالة (ب) لعمليات تشطيبها فإذا كان إنتاج السيارة الصغيرة يحتاج إلى عمل ٥ رجال يوميا فى الصالة (أ) وأربعة رجال يوميا للصالة (ب) والسيارة الكبيرة تحتاج إلى عمل ٨ رجال يوميا فى الصالة (أ) ٤ عمال يوميا بالصالة (ب) وكانت المعدات والآلات فى الصالة (أ) لا تسمح بعمل أكثر من ١٢٠ رجلا والصالة (ب) لا تسمح بعمل أكثر من ٧٢ رجلا بها وكان مكسب المصنع من السيارة الصغيرة ٤٠٠٠ جنيه والكبيرة ٦٠٠٠ جنيه اوجد عدد السيارات التى يمكن أن ينتجها المصنع من كل نوع لتحقيق أكبر ربح [٨ ، ١٠]

[٣٥] يريد فلاح أن يشترى عددا من الأبقار وعددا من الأغنام وفى السوق وجد أن سعر البقرة ٥٠٠ جنيه والشاة ٢٠٠ جنيه ولا يستطيع أن يصرف فى الشراء أكثر من ٩٠٠٠ جنيه كما أن تربية البقرة الواحدة تحتاج إلى فدانين من الحشائش فى العام وتربية الشاة يحتاج إلى فدان من الحشائش فى العام وهو لا يمتلك أكثر من ٤٠ فدان حشائش ويعلم انه يكسب ١٢٠٠ جنيه فى العام من ألبان البقرة ٥٠٠ جنيه من أصواف الشاة اوجد عدد الأبقار والأغنام التى يمكن أن يشتريها لكى يحقق أكبر ربح فى العام [١٠ بقرات ، ٢٠ غنمة]

[٣٦] طلب من احد المخابز صنع أكبر كمية ممكنة من نوع معين من الفطائر ونوع معين من الكعك فورا وعلم أن كمية الدقيق اللازمة لصنع الفطيرة أو الكعكة الواحدة ٩٠ جم وكمية السكر اللازمة لصنع الكعكة ٦٠ جم ولصنع الفطيرة ٣٠ جم ولا يوجد بالمخبز حينئذ أكثر من ٦٣ كجم دقيق ، ٣٦ كجم سكر وكان مكسب المخبز من الكعكة ٥٠ قرش والفطيرة ٤٠ قرش اوجد العدد المناسب من كل من الكعك والفطائر الذى يصنعه المخبز لكى يحقق أكبر ربح ممكن [٥٠٠ كعكة ، ٢٠٠ فطيرة]

[٣٧] مصنع ينتج نوعين من القماش احدهما فاخر للتصدير والآخر شعبى فإذا كان الطن من النوع الفاخر يحتاج إلى ٤ ساعات بقسم النسيج يوميا وثلاث ساعات بقسم الصباغة والطن من النوع الشعبى يحتاج إلى ساعتين بقسم النسيج وساعتين بقسم الصباغة وقسم النسيج لا يعمل أكثر من ١٤ ساعة يوميا وقسم الصباغة لا يعمل أكثر من ١٢ ساعة يوميا وربح المصنع من النوع الفاخر ٢٠٠ج لكل طن ومن النوع الشعبى ١٢٠ جنيه لكل طن اوجد عدد الأطنان التى ينتجها المصنع من كل نوع لكى يحقق أكبر ربح [٢ طن ، ٣ طن]

✍ [٣٨] مصنع للحقائب الجلدية يصنع نوعين من الحقائب نوع كبير تحتاج الواحدة منه إلى مواد خام تكلف ٦٠ جنيه والصغيرة مواد خام تكاليفها ٤٠ جنيه ولا يسمح بإنفاق أكثر من ١٢٠٠ جنيه على المواد الخام أسبوعيا ويحتاج صناعة الحقيبة الكبيرة إلى ٤ ساعات عمل والصغيرة إلى ساعتين عمل والمصنع لا يعمل أكثر من ٧٠ ساعة فى الأسبوع فإذا كان مكسب المصنع فى الحقيبة الكبيرة ٨ جنيهات والصغيرة ٥ جنيهات اوجد عدد الحقائب التى ينتجها المصنع أسبوعيا من كل نوع لكى يحقق أكبر ربح [١٠ ، ٥]

مستودع لبيع الأرز والسكر يستوعب مخزنه ٣٠٠ شوالا فقط سعة كل منها ٥٠ كجم كل أسبوع ويبيع أسبوعيا من الأرز على الأقل ضعف ما يبيعه من السكر فإذا كان سعر بيع شوال الأرز ٥٠٠ جنيه والسكر ٨٠٠ جنيه اوجد أكبر دخل ممكن لهذا المستودع فى الأسبوع [١٨٠ ألف جنيه]

✍ [٣٩] شركة للمقاولات يسمح لها بتعيين ١٢٠ عامل على الأقل لا نجاز إحدى مشروعاتها قانون العمالة لا يسمح لها بتعيين أكثر من عامل واحد غير ماهر لكل ثلاثة عمال مهرة اوجد عدد العمال المهرة وغير المهرة التى يمكن تعيينهم لتحقيق أكبر إنتاج إذا علم أن العامل الماهر ينجز ساعتين عمل وغير الماهر ينجز ساعة واحدة عمل [٣٠ غير ماهر ، ٩٠ ماهر]

✍ [٤٠] كلفت إحدى شركات النقل بنقل ٢٤٠ طالب طيران بمعداتهم إلى موقع للتدريب على بعد ١٦٠ ميل من مقرهم باستخدام أسطول الشركة من السيارات حمولة ٣ طن ، ١ طن فإذا علم انه لا يوجد لدى الشركة أكثر من ١٦ عربة من هذين النوعين جاهزة للسفر وان السيارة حمولة ٣ طن تستطيع نقل ٢٠ طالب بمعدل ٨ ميل لكل جالون بنزين والسيارة حمولة طن واحد تستطيع نقل ١٢ طالب بمعدل ١٦ ميل لجالون البنزين وكانت تكلفة الوقود ٥ جنيه للجالون اوجد عدد السيارات التى يمكن استخدامها من كل نوع لتحقيق ارخص التكاليف [٦ كبيرة ، ١٠ صغيرة]

✍ [٤١] تقوم إحدى المدارس بتقديم وجبة جافة لطلابها مكونة من صنفين من الأطعمة فإذا كانت كل وحدة من الصنف الأول تشتمل على ٨٠ جم من البروتينات ، ٤٠ جم من الفيتامينات بينما تشتمل الوحدة من الصنف الثانى على ٤٠ جم من البروتينات ، ٦٠ جم من الفيتامينات وكان الطالب الواحد يلزمه على الأقل ٣٢٠ جم من البروتينات ٢٤٠جم من الفيتامينات فاوجد عدد الوحدات التى يجب أن تقدمها المدرسة من كل صنف فى الوجبة الواحدة بحيث يضمن لكل تلميذ الحد الأدنى من البروتينات والفيتامينات بأقل تكلفة ممكنة علما بان ثمن الوحدة من الصنف الأول ٤٠ قرش ومن الصنف الثانى ٥٠ قرش [٣ ، ٢]



تمارين [١٠] على المتطابقات

[١] أكمل العبارات الآتية

❶ جا^2 β + جتا^2 θ = ...

❷ ظتا^2 β − قتا^2 θ = ...

❸ جا^2 θ = ١ − .....

❹ ١ − قتا^2 β = ...

❺ جتا^2 β = ١ − ....

❻ جا θ قتا θ = ...

❼ ظا θ × ...... = ١

❽ ظا θ ظتا θ = ...

❾ جا β × ..... = ١

❿ جتا β قا β = ...

⓫ جتا θ × ...... = ١

⓬ ١ + ظا^2 β = ...

⓭ ١+ ظتا^2(٩٠° − β) = ...

⓮ قا^2 θ − ظا^2 θ = ...

⓯ ١+ ظا^2(٩٠° − θ) = ...

⓰ ١ − قا^2 β = ...

⓱ جتا β × ..... = جا β

⓲ ظا^2 θ − قا^2 θ = ...

⓳ جا θ × ...... = جتا θ

⓴ ١ + ظتا^2 β = ...

㉑ جا^2 ٢٠° + جا^2 ..... = ١

㉒ قتا^2 θ − ظتا^2 θ = ...

㉓ جتا^2 ٨٠° + جتا^2 .... = ١

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ المقدار $\frac{\text{ظا } \theta \text{ ظتا } \theta}{\text{قا } \theta}$: فى أبسط صورة يساوى

(١) جا θ (٢) جتا θ (٣) قا θ (٤) قتا θ

❷ المقدار : جا θ جتا θ ظا θ فى أبسط صورة يساوى :

(١) جا^2 θ (٢) جتا^2 θ (٣) ظا^2 θ (٤) ١ − جا^2 θ

❸ المقدار : جا(٩٠° − θ) قتا(٩٠° − θ) فى أبسط صورة يساوى :

(١) ١ (٢) جا^2 θ (٣) جتا^2 θ (٤) جا θ جتا θ

❹ المقدار : $\frac{\text{١ − جتا}^2 \beta}{\text{جا}^2 \beta \text{ − ١}}$ فى أبسط صورة يساوى :

(١) − ظا^2 β (٢) − ظتا^2 β (٣) ظا^2 β (٤) ظتا^2 β

[٣] اثبت صحة المتطابقات التالية :

❶ $\frac{\text{قتا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} \times (1 - \text{جا}^2\theta) = \text{ظتا}\,\theta$

❷ $\frac{1}{\text{جا}^2(90^\circ - \alpha)} - \text{ظا}^2\alpha = 1$

❸ $\frac{1}{1 + \text{ظتا}\,\theta} = \frac{\text{ظا}\,\theta}{1 + \text{ظا}\,\theta}$

❹ $\frac{1 + \text{ظا}^2\beta}{\text{قا}^4\beta} = 1 - \text{جا}^2\beta$

❺ $(\text{قا}\,\alpha - \text{ظا}\,\alpha)^2 = \frac{1 - \text{جا}\,\alpha}{1 + \text{جا}\,\alpha}$

❻ $\frac{1}{1 + \text{ظا}^2\alpha} - \frac{1}{1 + \text{ظا}^2\beta} = \text{جتا}^2\alpha - \text{جتا}^2\beta$

❼ $\frac{\text{جتا}^2\alpha - \text{جا}^2\alpha}{\text{جا}\,\alpha\,\text{جتا}^2\alpha + \text{جتا}\,\alpha\,\text{جا}^2\alpha} = \text{قتا}\,\alpha - \text{قا}\,\alpha$

[٤] اثبت صحة المتطابقات التالية

❶ $\text{ظا}\,\mu\,\text{جتا}\,\mu = \text{جا}\,\mu$

❷ $\text{ظتا}\,\beta\,\text{جا}\,\beta = \text{جتا}\,\beta$

❸ $\text{جا}\,\mu\,\text{جتا}\,\mu\,\text{ظا}\,\mu = 1 - \text{جتا}^2\mu$

❹ $\text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta = \text{قا}\,\theta\,\text{قتا}\,\theta$

❺ $\text{جا}\,\mu\,\text{جتا}\,\mu\,\text{قا}\,\mu\,\text{قتا}\,\mu = 1$

❻ $\text{جتا}\,\theta + \text{جا}\,\theta\,\text{ظا}\,\theta = \text{قا}\,\theta$

❼ $\text{جتا}\,\theta + \text{ظا}\,\theta\,\text{جا}\,\theta = \text{قا}\,\theta$

❽ $\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta\,\text{ظتا}\,\theta = \text{قتا}\,\theta$

❾ $2 - \text{جتا}^2\theta + 2\,\text{جا}\,\theta = (1 + \text{جا}\,\theta)^2$

❿ $\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta\,\text{ظا}\,\theta = 1 - \text{جتا}^2\theta$

⓫ $\text{قا}^2\mu - \text{جا}^2\mu = \text{جتا}^2\mu + \text{ظا}^2\mu$

⓬ $\text{قا}\,\mu\,\text{قتا}\,\mu\,\text{ظتا}\,\mu = 1 + \text{ظتا}^2\mu$

⓭ $\text{جتا}\,\mu \times \text{قتا}(90^\circ - \mu) - \text{ظا}\,45^\circ = 0$

⓮ $(1 + \text{جا}\,\mu)(\text{قا}\,\mu - \text{ظا}\,\mu)$

⓯ $\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta\,(\text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta) = 1$

⓯ $\text{قا}\,\mu - \text{جا}(90^\circ - \mu) = \text{جا}\,\mu\,\text{ظا}\,\mu$

⓰ $\text{جا}^2\mu - \text{جا}^4\mu = \text{جا}^2\mu\,\text{جتا}^2\mu$

⓱ $\text{جا}^3\mu\,\text{قتا}\,\mu + \text{جتا}^3\mu\,\text{قا}\,\mu = 1$

⓲ $\text{جا}^2\mu - \text{جا}^2\theta = \text{جتا}^2\theta - \text{جتا}^2\mu$

⓳ $\text{جا}^4\theta - \text{جتا}^4\theta = 1 - 2\,\text{جتا}^2\theta$

[٥] اثبت صحة المتطابقات التالية

❶ ٤ جا^{2} μ − ٣ = ١ − ٤ جتا^{2} μ

❷ ظا^{2} μ − جا^{2} μ = ظا^{2} μ جا^{2} μ

❸ قا^{2} θ + قتا^{2} θ = قا^{2} θ قتا^{2} θ

❹ قا^{2} θ + قتا^{2} θ = (ظا θ + ظتا θ)^{2}

❺ قا^{2} μ + قتا^{2} μ − ٤ = (ظا μ − ظتا μ)^{2}

❻ ظتا μ − قا μ قتا μ (١ − ٢ جا^{2} μ)

❼ (جا θ + جتا θ)^{2} + (جا θ − جتا θ)^{2}

❽ ٢ − جا^{2} μ + ٢ جتا μ = (١ + جتا μ)^{2}

❾ (١ − جتا β) (١ + جتا β) = جا^{2} β

❿ قتا^{2} β − جتا^{2} β = جا^{2} β + ظتا^{2} β

⓫ (١ − جا β) (١ + جا β) = جتا^{2} β

⓬ ١ − ٢ جتا^{2} θ + جتا^{4} θ = جا^{4} θ

⓭ ١ − ٢ جا^{2} θ = ٢جتا^{2} − ١

⓮ جتا^{4} θ − جا^{4} θ = ١ − ٢ جا^{2} θ

⓯ ظتا θ − ظا θ = ٢ ظتا θ − قتا θ قا θ = قا θ قتا θ − ٢ ظا θ

⓰ (ظا μ جتا μ + ظتا μ جا μ)^{2} = ١ + ٢ جا μ جتا μ

⓱ (جا θ + جتا θ)^{2} − ٢ جا θ جتا θ = ١

⓲ ٣ (جا^{4} θ + جتا^{4} θ) − ٢ (جا^{6} θ + جتا^{6} θ)

⓳ جا μ قا (90° − μ) + جتا μ قتا (90° − μ) = ٢

⓴ جا^{2} β − جتا^{2} β = ٢ جا^{2} β − ١ = ١ − ٢جتا^{2} β

㉑ (١ + ظا^{2} μ) جتا^{2} μ + (١ + ظتا^{2} μ) جا^{2} μ = ٢

[٦] اثبت صحة المتطابقات التالية

❶ $\frac{\text{١} + \text{ظا}^{\text{٢}}\beta}{\text{ظا}^{\text{٢}}\beta} = \text{قتا}^{\text{٢}}\beta$

❷ $\frac{\text{١} - \text{جتا}\,\beta}{\text{جا}\,\beta} = \frac{\text{جا}\,\beta}{\text{١} + \text{جتا}\,\beta}$

❸ $\text{جتا}^{\text{٢}}\beta - \text{جا}^{\text{٢}}\beta = \frac{\text{١} - \text{ظا}^{\text{٢}}\beta}{\text{١} + \text{ظا}^{\text{٢}}\beta}$

❹ $\frac{\text{جتا}^{\text{٣}}\alpha + \text{جتا}\,\alpha\ \text{جا}^{\text{٢}}\alpha}{\text{جا}\,\alpha} = \text{ظتا}\,\alpha$

❺ $(\text{قتا}\,\beta - \text{ظتا}\,\beta)^{\text{٢}} = \frac{\text{١} - \text{جا}\,\beta}{\text{١} + \text{جا}\,\beta}$

❻ $\frac{\text{جا}\,\beta}{\text{١} + \text{جتا}\,\beta} + \frac{\text{١} + \text{جتا}\,\beta}{\text{جا}\,\beta} = \text{٢}\ \text{قتا}\,\beta$

❼ $\frac{\text{ظتا}^{\text{٢}}\beta - \text{١}}{\text{١} + \text{ظتا}^{\text{٢}}\beta} = \text{٢}\,\text{جتا}^{\text{٢}}\beta - \text{١}$

❽ $\frac{\text{١} + \text{قتا}\,\beta}{\text{قتا}\,\beta - \text{١}} = \frac{\text{١} + \text{جا}\,\beta}{\text{١} - \text{جا}\,\beta}$

❾ $\frac{\text{١}}{\text{قا}^{\text{٢}}\alpha} - \frac{\text{١}}{\text{قا}^{\text{٢}}\beta} = \text{جا}^{\text{٢}}\alpha - \text{جا}^{\text{٢}}\beta$

❿ $\frac{\text{١}}{\text{١} + \text{جا}\,\theta} + \frac{\text{١}}{\text{١} - \text{جا}\,\theta} = \text{٢}\ \text{قا}^{\text{٢}}\theta$

⓫ $\frac{\text{١} + \text{ظا}^{\text{٢}}\theta}{\text{ظا}^{\text{٢}}\theta} = \text{قتا}^{\text{٢}}\theta$

⓬ $\frac{\text{جتا}\,\beta}{\text{١} - \text{جا}\,\beta} = \frac{\text{١} + \text{جا}\,\beta}{\text{جتا}\,\beta}$

⓭ $\frac{\text{ظا}\,\beta - \text{ظتا}\,\beta}{\text{ظا}\,\beta + \text{ظتا}\,\beta} = \text{٢}\,\text{جا}^{\text{٢}}\text{هـ} - \text{١}$

⓮ $\frac{(\text{١} - \text{جتا}^{\text{٢}}\alpha)}{\text{جتا}\,\alpha} = \text{جا}\,\alpha\ \text{جتا}\,\alpha$

⓯ $\frac{\text{١} + \text{ظا}^{\text{٢}}\alpha}{\text{١} + \text{ظتا}^{\text{٢}}\alpha} = \text{ظا}^{\text{٢}}\alpha$

⓰ $\text{جاب}\ \text{ظاب} = \frac{\text{١} - \text{جتا}^{\text{٢}}\text{ب}}{\text{جتاب}}$

⓱ $\frac{\text{جا}^{\text{٢}}\alpha + \text{جتا}^{\text{٢}}\alpha}{\text{جتا}^{\text{٢}}\alpha} = \text{قا}^{\text{٢}}\alpha$

⓲ $\frac{\text{جا}^{\text{٣}}\alpha + \text{جا}\,\alpha\ \text{جتا}^{\text{٢}}\alpha}{\text{جتا}^{\text{٢}}\alpha} = \text{ظا}\,\alpha$

⓳ $\frac{\text{٢}\,\text{ظا}\,\theta}{\text{١} + \text{ظا}^{\text{٢}}\theta} = \text{٢}\ \text{جا}\,\theta\ \text{جتا}\,\theta$

⓴ $\frac{\text{جا}\,\theta - \text{٢}\,\text{جا}^{\text{٢}}\theta}{\text{٢}\,\text{جتا}^{\text{٣}}\theta - \text{جتا}\,\theta} = \text{ظا}\,\theta$

㉑ $\frac{\text{١}}{\text{١} + \text{ظا}\,\theta} = \frac{\text{ظتا}\,\theta}{\text{١} + \text{ظتا}\,\theta}$

㉒ $\frac{\text{ظتا}^{\text{٢}}\theta}{\text{ظتا}^{\text{٢}} + \text{١}} = \text{جتا}^{\text{٢}}\theta$

[U] اثبت صحة المتطابقات التالية

(١) $\frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}\,\theta} + \frac{\text{ظا}\,\theta}{\text{ظتا}\,\theta} = \frac{\text{جا}^2\theta\,(1 + \text{جتا}\,\theta)}{\text{جتا}^2\theta}$

(٢) $\frac{\text{قا}^2\alpha - \text{ظا}^2\alpha}{\text{قتا}^2\alpha} = \frac{\text{قتا}^2\alpha - \text{ظتا}^2\alpha}{\text{قا}^2\alpha} = 1$

(٣) $\frac{\text{جا}\,\theta - \text{جتا}(90^\circ - \text{ص})}{\text{جتا}\,\theta + \text{جتا}\,\text{ص}} + \frac{\text{جا}(90^\circ - \theta) + \text{جتا}\,\text{ص}}{\text{جا}\,\theta + \text{جا}\,\text{ص}} = \text{صفر}$

(٤) $\frac{1}{\text{قتا}(180^\circ - \theta) - 1} + \frac{1}{\text{قا}(90^\circ - \theta) + 1} = 2\,\text{قا}\,\theta\,\text{ظا}\,\theta$

(٥) $\frac{\text{قا}^2\theta\,\text{جا}^2\theta - \text{قتا}^2\theta + \text{قتا}^2\theta\,\text{جتا}^2\theta}{\text{قا}^2\theta\,\text{جا}^2\theta - \text{قتا}^2\theta\,\text{جتا}^2\theta}$

(٦) $\frac{\text{قا}\,\theta + \text{قتا}\,\theta}{\text{قا}\,\theta - \text{قتا}\,\theta} = \frac{\text{ظا}\,\theta + 1}{\text{ظا}\,\theta - 1} = \frac{1 + \text{ظتا}\,\theta}{1 - \text{ظتا}\,\theta}$

(٧) $\frac{\text{ظتا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta}{\text{ظتا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta} = \frac{\text{ظتا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta}{\text{ظتا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta}$

(٨) $\frac{\text{ظا}\,\theta + \text{قا}\,\theta - 1}{\text{ظا}\,\theta - \text{قا}\,\theta + 1} = \text{ظا}\,\theta + \text{قا}\,\theta$

(٩) $\frac{1 + \text{ظا}^2\theta}{1 + \text{ظتا}^2\theta} = \left(\frac{1 - \text{ظا}\,\theta}{1 - \text{ظتا}\,\theta}\right)^2$

(١٠) $\frac{\text{ظا}\,\text{س}}{\sqrt{\text{ظتا}^2\text{س} + 1}} = \text{جا}\,\beta$

(١١) $\frac{\text{جتا}(90^\circ - \beta)\,\text{جتا}\,\beta\,[\text{ظا}\,\beta + \text{ظتا}\,\beta]}{3\,\text{جتا}\,60^\circ + \text{جا}^2\,45^\circ} = \frac{1}{2}$

(١٢) $\frac{\text{جا}(90^\circ - \beta)}{\text{جتا}(90^\circ - \beta)} + \frac{\text{جا}\,\beta}{\text{جا}(90^\circ - \beta)} = \text{قتا}\,\beta\,\text{قا}\,\beta$

(١٣) $\frac{\text{جا}^3\beta + \text{جا}\,\beta\,\text{جتا}^2\beta}{\text{جتا}\,\beta} - \text{ظا}\,\beta + 2\,\text{جا}\,\beta\,\text{قتا}\,\beta = 2$

تمارين [١١] على حل المعادلات المثلثية

[١] أكمل ما يأتي :

❶ الحل العام للمعادلة : جتا θ = ١ لجميع قيم θ هو ....

❷ الحل العام للمعادلة : جا θ = ١ لجميع قيم θ ∋ [π ، ٢ π] هو ....

❸ الحل العام للمعادلة : جتا θ = جا θ لجميع قيم θ هو ....

❹ مجموعة حل المعادلة ظتا θ = $\sqrt{٣}$ حيث θ ∋ [π ، ٢ π] هو ....

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ إذا كانت ٠° ⩽ θ > ٣٦٠° وكانت : جا θ + ١ = ٠ فان θ تساوى ....

(١) ٠° (٢) ٩٠° (٣) ١٨٠° (٤) ٢٧٠°

❷ إذا كانت ٠° ⩽ θ > ٣٦٠° وكانت : جتا θ + ١ = ٠ فان θ تساوى ....

(١) ٩٠° (٢) ١٨٠° (٣) ٢٧٠° (٤) ٣٦٠°

❸ إذا كانت ٠° ⩽ θ > ١٨٠° وكانت : $\sqrt{٣}$ ظا θ − ١ = ٠ فان θ تساوى ....

(١) ٣٠° (٢) ٦٠° (٣) ١٢٠° (٤) ١٥٠°

❹ إذا كانت ١٨٠° ⩽ θ > ٣٦٠° وكانت : ٢جتا θ + ١ = ٠ فان θ تساوى ....

(١) ٢١٠° (٢) ٢٤٠° (٣) ٣٠٠° (٤) ٣٣٠°

[٣] أوجد الحل العام لكل من المعادلات التالية :

❶ ٢ جا θ = ١

❷ ٢ جتا θ − $\sqrt{٣}$ = ٠

❸ $\sqrt{٣}$ ظا θ − ١ = ٠

❹ ٢جتا٢ θ − ١ = ٠

❺ ٤جا٢ θ = ٣

❻ ٢جتا٢ θ = جتا θ

❼ ٣قا٢ θ = ٤

❽ جتا٢ θ − جتا θ = ٠

❾ $\sqrt{٢}$ جتا ٢ θ − جتا θ = ٠

❿ ظا θ − ٠,٣٢٥ = ٠

⓫ جتا θ − ٠,٥٦٤ = ٠

⓬ جا θ − ٠,٢٤٥ = ٠

⓭ ٢جتا٢ س + جتا س = ٠

⓮ ظا٢ س = ١

⓯ ٣ظتا٢ θ = ١

⓰ ٢ جا٢ θ + جا θ − ١ = ٠

⓱ ٢جا٢ θ + ٣ جا θ − ٢ = ٠

⓲ ٣جتا٢ θ + ٢جا θ جتا θ = ٠

[٤] إذا كانت θ ∈ [٠ ، ٢π] فأوجد مجموعة حل المعادلات التالية :

❶ ٢جا θ + ١ = ٠
❷ ٢جتا θ − ١ = ٠
❸ ظا θ − ١ = ٠
❹ قتا θ − ٢ = ٠
❺ ظتا θ − √٣ = ٠
❻ √٣ قا θ − ٢ = ٠
❼ جا θ + جتا θ = ٠
❽ جا θ − ٢ جتا θ = ٠
❾ ٢ جا θ + √٣ = ٠
❿ ٣ جتا θ = ٠
⓫ ٢ جتا θ + √٣ = ٠
⓬ √٢ جتا θ + ٢ = ٠
⓭ ظا θ − ١ = ٠
⓮ ٣قتا θ + ٢ = ٠
⓯ جتا θ = − ٠,٥٤
⓰ ٤ جتا θ + ٣ = ٠
⓱ قا θ + √٢ = ٠
⓲ ٤ ظا θ − ٥ = ٠
⓳ جتا θ + ١ = ٠
⓴ ٤جتا θ = ٣
(٢١) ٤ظا θ − ٥ = ٠
(٢٢) | جا θ | = ٠
(٢٣) ٣ قتا θ + ٢ = ٠
(٢٤) ٢√٣ جتا θ + ٣ = ٠
(٢٥) جا θ جتا θ = ٠
(٢٦) ظا (٩٠° − θ) = − √٣
(٢٧) ٣ ظا θ + ظا ٦٠° = ٠
(٢٨) √٣ قتا θ + ٢جا ٩٠° = ٠
(٢٩) ٢جتا (٢٧٠° − θ) − √٣ = ٠
(٣٠) ٤ جتا θ + جتا ٢٧٠° = ظا ٤٥°

[٥] إذا كانت θ ∈ [٠ ، ٢π] فأوجد مجموعة حل المعادلات التالية :

❶ ٢جا² θ − جا θ = ٠
❷ ٢جا² θ + جا θ = ٠
❸ ٢ جا² θ + ٣ جا θ = ٠
❹ √٢ جا² θ − جا θ = ٠
❺ ٢جا² θ − √٣ جا θ = ٠
❻ جا² θ + ٢جا θ = ٠
❼ جتا² θ − جتا θ = ٠
❽ ٢جتا² θ − جتا θ =
❾ جا² θ − جتا² θ = ٠
❿ ظا² θ − ظا θ = ٠
⓫ ظا² θ + ظا θ = ٠
⓬ ظا² θ − √٣ ظا θ = ٠
⓭ ٣ ظا² θ − ١ = ٠
⓮ ظا² θ − ٣ = ٠
⓯ ٤ جا² θ − ١ = ٠

[٦] إذا كانت θ ∈ [٠ ، ٢π] فأوجد مجموعة حل المعادلات التالية

❶ ٢ جا² θ = ٣جتا θ
❷ ٣جا θ − ٢جتا² θ = ٠
❸ ظا θ = ٤ − ٣ ظتا θ
❹ جتا² θ − جا² θ = ٢ − ٥ جتا θ
❺ ظتا θ + ظا θ = ٢ قا θ
❻ ظا θ − ظتا θ = قتا θ

⑦ ٤ قتا θ + ٢ جا θ = ٩

⑧ ٢ جتا θ + ٢ √٢ = ٣ قا θ

⑨ ٢ جا θ ظا θ + ١ = ظا θ + ٢ جا θ

⑩ ٦ ظا θ − ٥ √٣ قا θ + ٢ ظتا θ = ٠

⑪ ٥ ظا θ + ٦ ظتا θ = ١١

⑫ قا^٢ θ + ظا^٢ θ = ٣ ظا θ

⑬ قا θ قتا θ − ظا θ = ٢

⑭ ظا θ + قا ٣٠° = ظتا θ

⑮ ظتا θ + ظا θ = ٢ قتا θ

⑯ ٤ جا^٢ θ + √٣ = ٢ (√٣ + ١) جا θ

⑰ ظا θ + قا θ = √٣

⑱ ٥ ظا^٢ θ − قا^٢ θ = ١

⑲ ٨ جا^٢ θ − ٢ جتا θ = ٥

⑳ جا θ + قتا θ = ٥ / ٢

㉑ جتا θ + قا θ = ٢ (١ / ٢)

㉒ جا θ + قتا θ = ٣ / √٢

㉓ ٣ جا θ + ٤ جتا^٢ θ = ٤ (١ / ٢)

㉔ جتا^٢ θ + جا θ + ٣ / قتا θ = ١١ / ٤

㉕ ٢ جا θ جتا θ + ١ = ظتا θ + ٢ جتا θ

㉖ ظا θ − √٣ ظتا θ + ١ = √٣

[ب] أوجد حل كل من المعادلات التالية فى الفترة] ٠ ، ٣π / ٢ [

① ظا^٢ θ − ظا θ = ٠

② ٢ جا θ جتا θ − جتا θ = ٠

③ ٢ جا^٢ θ − ٣ جا θ − ٢ = ٠

④ ٢ جا θ جتا θ − √٣ جا θ = ٠

⑤ ٢ جا θ جتا θ + √٣ جا θ = ٠

⑥ ٢ جتا^٢ θ − ٥ جتا θ + ٢ = ٠

⑦ ١٠ جا^٢ θ − ٩ جا θ − ٩ = ٠

⑧ ٦ جا^٢ θ − جا θ − ٢ = ٠

⑨ ٦ جتا^٢ θ − ٥ جتا θ + ١ = ٠

⑩ ٢ ظا^٢ θ − ظا θ − ١ = ٠

⑪ ٤ جا^٢ θ + ٨ جا θ + ٣ = ٠

⑫ ٢ قتا^٢ θ − ٥ قتا θ + ٢ = ٠

⑬ ٤ جا^٢ θ + ٨ جا θ + ٣ = ٠

⑭ ٢ جا^٢ θ − (٢ − √٣) جا θ − √٣ = ٠

⑮ جا θ (جتا^٢ θ − ١) = ٠

⑯ ٢ جتا^٢ θ − (٢ + √٣) جتا θ + √٣ = ٠

⑰ ٢ ظا^٢ θ = (١ − ظا θ) (١ + ظا θ)

⑱ ٤ جا^٢ θ + ٢ (١ − √٣) جا θ − √٣ = ٠

[٨] إذا كانت θ ∈ [٠ ، ٢π] فأوجد مجموعة حل المعادلات التالية :

① جتا (٩٠° − θ) = $\sqrt{3}$ جا (٩٠° − θ)
② ٢ جتا² θ + ١١ جا (٩٠ − θ) − ٦ =
③ قا θ + ٢ جتا θ = ٣
④ جتا θ = ٢ − قا θ
⑤ ٤ جا θ + قتا θ − ٤ = ٠
⑥ جتا θ + قا θ جتا² θ = $\sqrt{3}$
⑦ ظا⁴ θ − ٣ ظا² θ + ٢ = ٠
⑧ ٤ ^جتا θ^ = ١
⑨ ٢ جا θ جتا θ + ٢ جا θ − جتا θ − ١ = ٠
⑩ ٥ ^قا θ^ = $\frac{١}{٢٥}$
⑪ $\sqrt{3}$ ظا² θ − (١ + $\sqrt{3}$) ظا θ + ١ = ٠
⑫ ظا² + قا² θ = ٧
⑭ ٦ ظا² θ + ٥ قا θ + ٥ = ٠
⑮ ٩ ^جا (٢٧٠° − θ)^ = ٣ ^جا (٢٧٠° + θ) + جتا ١٨٠°^
⑯ $\frac{\text{قا}^2 θ − \text{ظا}^2 θ}{\text{جا}^2 θ} = \frac{٤}{٣}$
⑰ ظا³ θ − $\frac{١}{\text{ظتا } θ}$ = ٠

[٩] أوجد قياس أصغر زاوية موجبة تحقق المعادلتين :

٢ جتا θ + ١ = ٠ ، ظا θ − $\sqrt{3}$ = ٠

[١٠] أوجد مجموعة حل المعادلة جا ($\frac{٩θ}{٤}$) = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ حيث س ∈] ٠° ، ٩٠° [

[١١] إذا كانت : ٠° < θ ⩽ ٣٦٠° فأوجد مجموعة حل المعادلات التالية :

① ٢ جا θ جتا θ + ٣ جتا θ = ٠
② ٤ جا² θ − ٣ جا θ جتا θ = ٠

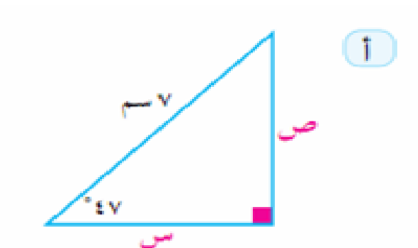
[١٢] أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية بالراديان .

① ظا θ = ١
② جتا θ = جتا ٢ θ
③ ٢ جا θ − $\sqrt{3}$ = ٠

① جا θ = $\frac{\sqrt{3}}{٢}$
٢ جتا θ = ١
③ ظا θ = $\frac{\sqrt{3}}{٢}$

تمارين ( ) على حل المثلث القائم

[١] أوجد قيمة كل من س ، ص فى كل شكل من الأشكال الآتية :





[٢] أوجد قيمة كل من الزاويتين α ، β بالقياس الستينى فى كل شكل من الأشكال الآتية :

حل المثلث ﺃ ب جـ القائم الزاوية فى ب مقربا الزوايا لأقرب درجة و الطول لأقرب سم حيث :

① ﺃ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٦ سم
② ﺃ ب = ١٢,٥ سم ، ب جـ = ١٧,٦ سم
③ ﺃ ب = ٥,٣ سم ، ﺃ جـ = ١٢,٢ سم
④ ب جـ = ٣١ سم ، ﺃ جـ = ٤٢ سم

[٣] حل المثلث ﺃ ب جـ القائم الزاوية فى ب مقربا الزوايا لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من الراديان والطول لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من السنتيمترات حيث

① ق̂(∠ ﺃ) = ٠,٩٢٥ ^ء ، ب جـ = ٨ سم
② ق̂(∠ ﺃ) = ١,١٦٩ ^ء ، ﺃ ب = ١٨ سم
③ ق̂(∠ جـ) = ٠,٦٤٦ ^ء ، ﺃ جـ = ١٥,٧ سم
④ ق̂(∠ جـ) = ١,٠٨٢ ^ء ، ﺃ جـ = ٣٥,٨ سم

مسائل على حل المثلث إذا علم فيه طول الوتر وقياس زاوية حادة

[٤] ﺃ ب جـ ∆ قائم الزاوية فى ب ، فيه ﺃ جـ = ١٠٠ سم ، ق̂(∠جـ) = ٦٣°
احسب طول كل من $\overline{\text{ﺃ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ [٨٩,١ ، ٤٥,٤]

[٥] ﺃ ب جـ ∆ قائم الزاوية فى ب فيه ﺃ جـ = ٢٨ سم ، ق̂(∠جـ) = ٥٤° ′٩
اوجد طول كل من $\overline{\text{ﺃ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ [٢٢,٦٩٤ ، ١٦,٤]

[٦] ﺃ ب جـ ∆ قائم الزاوية فى جـ فيه ق̂(∠ﺃ) = ١٣′ ٤٢° ، ﺃ ب = ٢٥ سم
احسب طول كل من $\overline{\text{ﺃ جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ب}}$ [١٨,٥ ، ١٦,٨]

[٧] حل المثلث القائم الزاوية الذى فيه ∠ ج قائمة ، أ ب = ١٢سم ، ق(∠ب) = ٥٥° ٣٣′

[٢٧′ ٣٤° ، ٩,٨٩٥ ، ٦,٧٨٨]

[٨] أ ب ج ء مستطيل فيه أ ج = ٢٠ سم ، ق(∠ أ ج ب) = ٣٢° ٤١′

احسب طولى أ ب ، ب ج

[١٠,٨ ، ١٦,٨٣٤]

[٩] حل المثلث القائم الذى طول وتره ٥٠ سم وقياس إحدى زاويتيه الحادتين = ٤٦° ١٩′

[٤١′ ٤٣° ، ٣٦,١٦ ، ٣٤,٥]

[١٠] Δ قائم أكبر أضلاعه طولا = ٤٠ سم وإحدى زواياه قياسها = ٤٣° ٣٧′

اوجد قياس زاويته الحادة الأخرى ، طول اصغر أضلاعه

[٢٣′ ٤٦° ، ٢٧,٥٩٢]

[١١] سلم طوله ١٥ قدم يرتكز على حائط راسى وعلى ارض افقية اوجد بعد طرفى السلم العلوى والسفلى عن الأرض والحائط على الترتيب إذا علمت أن زاوية ميل السلم على الأرض قياسها = ٢٧°

[٦,٨١ ، ١٣,٣٦٥]

[١٢] عمود تلغراف مثبت راسيا فوق ارض أفقية ومشدود من طرفه العلوى بحبل طوله ١٠ متر يميل على الأرض بزاوية قياسها ٧٣° ١٢′ اوجد طول العمود

[٩,٥٧٣ متر]

[١٣] أ ب ج Δ متساوى الساقين فيه أ ب = أ ج = ٢٥سم ، أ ء ⊥ ب ج ، ق(∠ب) = ٣٧° احسب طول كل من أ ء ، ب ج

[١٥,٠٤٥ ، ٣٩,٩٣]

[١٤] دائرة نصف قطرها ٥سم رسم فيها وتر يقابل زاوية مركزية قياسها ١٠٥°

احسب طول هذا الوتر

[٧,٩٣٤]

[١٥] أ ب قطر فى دائرة طوله ٢٠ سم رسم الوتران أ ج ، أ ء فى جهتين مختلفتين من القطر أ ب فاذا كان ق(∠ ب أ ج) = ٣٥° ١٣′ ، ق(∠ب أ ء) = ٢٧° ٦′

احسب محيط الشكل أ ج ب ء

[٥٤,٧٨٤]

مسائل على حل المثلث القائم إذا علم طول احد ضلعى القائمة وقياس زاوية حادة

[١٦] حل المثلث ٢ ب جـ القائم الزاوية فى ب إذا علم أن ٢ ب = ١٢ سم ، ق(∠جـ) = ٢٤ َ ٣٧ ْ

[٣٦ َ ٥٢ ْ ، ١٥,٦٩سم ، ١٩,٧سم]

[١٧] حل المثلث القائم ٢ ب جـ إذا علمت أن ق(∠جـ) = ٩٠ ْ ، ق(∠ب) = ٥٣ ْ ، ب جـ = ٨٠ سم

[٣٧ ْ ، ١٠٦,١٦ ، ١٣٢,٩]

[١٨] حل المثلث القائم ٢ ب جـ الذى فيه ∠ جـ قائمة ق(∠٢) = ٣٦ َ ٤٨ ْ ، ب جـ = ١٢٠ سم

[٢٤ َ ٤١ ْ ، ١٠٥,٨ ، ١٦٠سم]

[١٩] سلم يرتكز على حائط صانعا مع الأرض زاوية قياسها ٣٠ َ ٣٨ ْ ويبعد موقعه عن الحائط بقدر ١٥ متر فلأى ارتفاع يصل طرفه الأخر ما هو طول السلم

[١١,٩ ، ١٩,١٨ سم]

[٢٠] ٢ ب جـ ∆ متساوية الساقين فيه ٢ ب = ٢ جـ ، سم ، $\overline{٢ ء} \perp \overline{ب جـ}$

❶ إذا كان ق(∠ب) = ٤٢ ْ ، ٢ ء = ٥سم احسب طول ب جـ [١١,١٠٦سم]

❷ إذا كان ق(∠٢) = ٩٦ ْ ، ب جـ = ٤سم احسب طول ٢ ء [١,٨سم]

[٢١] ٢ ب جـ ء معين فيه ق(∠ ٢ ب ء) = ٢٤ َ ٣٣ ْ تقاطع قطراه فى م فكان طول م ٢ = ١٠ سم اوجد بدون قياس طول م ء

[١٥,١]

[٢٢] ٢ ب جـ ∆ فيه ق(∠جـ) = ٥٠ ْ ، ق(∠٢) = ٧٠ ْ ، طول الارتفاع = ٢ ء = ٢٠سم اوجد طول $\overline{ب جـ}$ [٢٨,٣١]

[٢٣] ٢ ب جـ ∆ قائم الزاوية فى ٢ ، ٢ ء عمودى على قاعدته ب جـ فإذا كان ٢ ب = ٣٥ سم ، ق(∠ب ٢ ء) = ١٥ َ ٢٠ ْ فاوجد طول جـ ء

[٨٩ سم]

مسائل على حل المثلث القائم اذا علم منه طولا ضلعين

[٢٤] ٱ ب جـ △ قائم الزاوية فى جـ ، ٱ جـ = ١٠ سم ، ٱ ب = ٢٥سم احسب ق(∠ ٱ) ، طول ب جـ

[٢٥َ ٦٦° ، ٢٢,٩١سم]

[٢٥] ٱ ب جـ △ قائم الزاوية فى ب ، فيه ٱ جـ = ٢٠٠ سم ب جـ = ١٢٠ سم

اوجد قياس الزاويتين ٱ ، جـ ، وطول ٱ ب

[٣٣َ ٤٠° ، ٢٧َ ٤٩° ، ١٥١,٩٨سم]

[٢٦] حل المثلث ٱ ب جـ القائم الزاوية فى جـ والذى فيه ب جـ = ١٥٤ سم ، ٱ جـ= ٢٣١سم

[٤٢َ ٣٣° ، ١٨َ ٥٦° ، ٢٧٧,٦]

[٢٧] حل المثلث ٱ ب جـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه ٱ ب = ٣٥سم ، ب جـ = ٤٥سم

[٧َ ٥٢° ، ٥٣َ ٣٧° ، ٥٧ سم]

[٢٨] حل المثلث ٱ ب جـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه ٱ ب = ٢٠٠ سم ، ب جـ = ١٦٠ سم

[٤٠َ ٣٨° ، ٢٠َ ٥١° ، ٢٥٦سم]

[٢٩] سلم طوله ٢٠ مترا مستند على حائط راسى وطرفه السفلى على بعد ٥ متر منها

فما هو قياس الزاوية التى يصنعها السلم مع الأرض

[٣١َ ٧٥°]

[٣٠] ٱ ب جـ △ متساوى الساقين فيه ب جـ = ١٢ سم ارتفاعه ٱ ء = ١٠ سم

اوجد قياسات زوايا هذا المثلث

[٥٦َ ٦١° ، ٢َ ٥٩° ، ٢َ ٥٩°]

[٣١] معين طولا قطريه ١٤ سم ، ٢٠ سم اوجد قياسات زوايا هذا المعين وطول ضلعه

[٧٠° ، ١١٠° ، ٧٠° ، ١١٠° ، ١٢,٢سم]

[٣٢] ٱ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه ٱ ب = ٱ جـ = ٥١ سم ، ب جـ = ٣٤ سم احسب

قياس كل من الزاويتين ٱ ب جـ ، ب ٱ جـ ، طول ارتفاع المثلث المرسوم من ٱ على $\overline{\text{ب جـ}}$

[٣٢َ ٧٠° ، ٥٦َ ٣٨° ، ٩٦,٤٧سم]

[٣٣] دائرة مركزها م طول نصف قرها = ٦سم ، ٱ نقطة خارجها رسم ٱ ب ليمسها عند ب فإذا

كان طول م ٱ = ١٠ سم فاوجد قياس ∠ ٱ م ب

[٨َ ٥٣°]

[٣٤] رسم وتر طوله ١٠ سم فى دائرة طول نصف قطرها = ١٣ سم

اوجد قياس الزاوية التى يقابلها الوتر عند المركز [١٤′ ٤٥°]

[٣٥] أ ب قطر فى دائرة طوله ٥٠سم رسم الوتر أ جـ الذى طوله ١٨,٧ سم

اوجد ق(∠ ب أ جـ) طول ب جـ [٢′ ٦٨° ، ٤٦,٣٧ سم]

[٣٦] أ ب جـ ∆ قائم الزاوية فى ب ، ء ∈ ب جـ ، ء ∉ ب جـ ، أ ب = ٣سم ، أ جـ = ٥سم

، أ ء = ٧سم فاوجد ق (∠ ب أ جـ) [٨′ ٥٣° ، ٢٩′ ١١°]

[٣٧] أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٢٠ سم ، ق(∠ أ ب جـ) = ٤٢° رسم أ ء عمودا على ب جـ

احسب طول أ ء إذا كان ء جـ = ١٨,١٤ سم اوجد ق(∠ جـ) [١٢,٣٨ ، ٢٦′ ٣٦°]

[٣٨] حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب فى الحالتين الآتيتين :

❶ أ ب = ٨ سم ، ب جـ = ١٢سم ❷ ب جـ = ٥ سم ، أ جـ = ١٣ سم

[٣٩] حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب فى الحالتين الآتيتين :

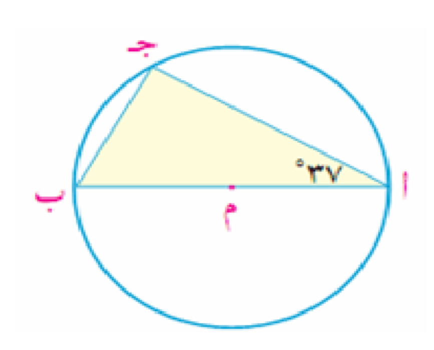
❶ أ ب = ٨سم ، ق(∠ جـ) = ٣٤° ❷ أ جـ = ٢٦سم ، ق(∠ أ) = ١٢′ ٥٣°

[٤٠] الربط بالهندسة :

يبين الشكل المقابل دائرة مركزها م ، أ ب قطر فيها

، فإذا كان : أ جـ = ١٢ سم ، ق(∠ أ) = ٣٧°

فأوجد طول نصف قطر الدائرة .



[٤١] س ص ع مثلث فيه س ص = ١١,٥سم ، ص ع = ٢٧,٦ سم ، س ع = ٢٩,٩ سم

، أثبت أن المثلث قائم الزاوية فى ص ، ثم أوجد قياس زاوية س

[٤٢] دائرة طول نصف قطرها ٦سم ، رسم فيها وتر يقابل زاوية مركزية قياسها ١٠٨°

احسب طول هذا الوتر مقربا الناتج لأقرب رقمين عشريين .

[٤٣] ﺃ ب جـ مثلث رسم $\overleftarrow{ﺃ ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ فاذا كان ﺃ ء = ٦سم ، ق(∠ ب) = ٥٢°

، ق(∠ جـ) = ٢٨° فأوجد طول $\overline{ب جـ}$ لأقرب سنتيمتر .

[٤٤] دائرة طول قطرها $\overline{ﺃ ب}$ يساوى ٢٠سم ، رسم $\overline{ﺃ جـ}$ وتر فيها طوله ١٢سم

، أوجد قياسات زوايا المثلث ﺃ ب جـ

[٤٥] قطعة أرض على شكل معين ﺃ ب جـ ء طول ضلعه ١٢ مترا ، ق(∠ ﺃ ب جـ) = ١٠٠°

أوجد طول كل من قطريه $\overline{ﺃ جـ}$ ، $\overline{ب ء}$ لأقرب متر .

[٤٦] ﺃ ب جـ ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه $\overline{ﺃ ء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، ﺃ ب = جـ ء = ٥سم

، ﺃ ء = ٤سم ، ب جـ = ١٠سم . أوجد قياس كل من زواياه الأربعة .

تمارين [١٣] على زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض

✍ [١] طائرة ورقية خيطها ٤٢ مترا فإذا كانت الزاوية التى يصنعها الخيط مع الأرض الأفقية تساوى ٦٣° اوجد لأقرب متر ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض

✍ [٢] من نقطة على سطح الأرض على بعد ٢٠ متر من قاعدة برج وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ١٢َ ٦٧° أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر [٤٧,٦ متر]

✍ [٣] رصد شخص قمة تل من نقطة تقع فى المستوى الأفقى المار بقاعدته و تبعد عنها ٥٠٠ متر فوجد أن قياس زاوية ارتفاعه ٤٢َ ١٨° أوجد لأقرب متر ارتفاع التل [١٦٩,٢ متر]

✍ [٤] من نقطة على سطح الأرض تبعد عن طائرة بمقدار ٢٠٠٠ متر وجد أن قياس زاوية ارتفاع الطائرة ٨٠° . أوجد ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض فى هذه اللحظة لأقرب متر [١٩٧٠ متر]

✍ [٥] شاهد راصد أن قياس زاوية ارتفاع منطاد هى ٣٠° ولما سار الراصد فى مستوى أفقى نحو المنطاد مسافة ١٠٠٠ متر شاهد أن قياس زاوية الارتفاع هى ٤٥° اوجد ارتفاع المنطاد لأقرب متر

✍ [٦] يقف شخص على بعد ٥٠ متر من قاعة برج رصد زاوية ارتفاع قمة برج فوجد ان قياسها ٣٥° اوجد ارتفاع البرج لاقرب متر

✍ [٧] رصد شخص طائرة على ارتفاع ١٠٠٠ متر فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ١٧/ ٢٥° اوجد المسافة الراصد عن الطائرة

✍ [٨] رصد شخص واقف على سطح الأرض طائرة على ارتفاع ٨٠٠ متر عن سطح الأرض فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ١٧/ ٢٥° اوجد المسافة بين الشخص والطائرة

✍ [٩] وجد راصد أن قياس زاوية ارتفاع قمة مئذنة على سطح الأرض تبعد ٤٢ مترا عن قاعدتها يساوى ٥٢° فما ارتفاع المئذنة لأقرب متر

✍ [١٠] سلم يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى ويرتفع عن سطح الأرض ٣,٨ متر والطرف السفلى للسلم على الأرض وقياس زاوية ميل السلم على الأرض ٦٤° اوجد لأقرب رقمين عشريين كلا من بعد الطرف السفلى عن الحائط ، طول السلم

✍ [١١] من سطح منزل ارتفاعه ٨ أمتار رصد شخص زاوية ارتفاع أعلى عمارة أمامه فوجد أن قياسها ٦٣° ورصد زاوية انخفاض قاعدتها فوجد أن قياسها ٢٨° اوجد ارتفاع العمارة لأقرب متر

✍ [١٢] إذا كان قياس زاوية ارتفاع مئذنة من نقطة على بعد ١٤٠ مترا من قاعدتها يساوى ٤٦ َ ٢٦° فما هو ارتفاع المئذنة لأقرب متر وإذا قيست زاوية ارتفاع المئذنة نفسها من نقطة تبعد ١١٠ أمتار من قاعدتها فاوجد لأقرب دقيقة قياس زاوية ارتفاعها عندئذ

✍ [١٣] شاهد راصد أن قياس زاوية ارتفاع منطاد مثبت هى $\frac{\pi}{6}$ ولما سار الراصد فى مستوى أفقى نحو المنطاد مسافة ٨٠٠ متر شاهد أن قياس زاوية الارتفاع هى $\frac{\pi}{4}$ اوجد ارتفاع المنطاد لأقرب متر

✍ [١٤] تقترب سفينة من منارة ارتفاعها ٥٠ مترا رصدت قمة المنارة فى لحظة ما فوجدت أن قياس زاوية ارتفاعها ١١ ,٠ ء وبعد ١٥ دقيقة رصدت قمة المنارة ثانية فوجدت أن قياس زاوية ارتفاعها ٢٢ ,٠ ء احسب سرعة السفينة علما بأنها تسير بسرعة منتظمة

✍ [١٥] من قمة صخرة ارتفاعها ١١٠ متر رصدت سفينتان فى البحر على شعاع واحد من قاعدة الصخرة فوجد أن قياس زاويتى انخفاضهما ١٢ َ ٤٨° ، ١٦ َ ١٢° أوجد البعد بين السفينتين لأقرب متر [٤٠٨ متر]

✍ [١٦] من قمة برج ارتفاعه ٧٠ مترا رصد شخص هدفين يقعان على مستقيم واحد يمر بقاعدة البرج وفى جهتين مختلفتين منه فوجد أن قياس زاويتى انخفاضهما ١٨ َ ٢٤° ، ٦ َ ٤٥° على الترتيب أوجد البعد بين الهدفين . [٢٢٤,٧٩ متر]

✍ [١٧] من قمة فنار ارتفاعه ٥٠ مترا عن سطح البحر وجد أن قياس زاوية انخفاض قارب ١٦ َ ٤٣° أوجد بعد القارب عن قاعدة الفنار لأقرب متر [٥٣,١ متر]

✍ [١٨] رصد شخص من قمة جبل ارتفاعه ٢,٥٦ كم نقطة على سطح الأرض فوجد أن زاوية انخفاضها هو ٦٣° اوجد المسافة لأقرب متر بين النقطة والراصد

✍ [١٩] من قمة صخرة ارتفاعها ١٨٠ متر من سطح البحر قيست زاوية انخفاض قارب يبعد ٣٠٠ متر عن قاعدة الصخرة فما مقدار قياس زاوية الانخفاض بالراديان

✍ [٢٠] جبل ارتفاعه ١٨٢٠ مترا وجد راصد من قمته أن قياس زاوية انخفاض نقطة على الأرض ٦٨° فما هى المسافة بين النقطة والراصد لأقرب متر

✍ [٢١] من قمة صخرة ارتفاعها ٢٠٠متر قيست زاوية انخفاض قارب يبعد ٣٥٠مترا عن قاعدة الصخرة فما قياس زاوية الانخفاض . [٢٩° ٤٤َ]

✍ [٢٢] من قمة فنار ارتفاعه ١٠٠مترا . رصدت زاوية انخفاض قارب فوجد أن قياسها ١٥° ٥٥ . أوجد بعد القارب عن قاعدة الفنار ثم أوجد قياس زاوية انخفاض القارب عندما يصبح على بعد ٥٠ متر من قاعدة الفنار [٣٥٠,٥ متر ، ٦٣° ٢٦َ]

✍ [٢٣] من قمة برج ارتفاعه ١٨٠ متر رصدت زاوية انخفاض سيارة على الطريق الأفقى المار بقاعدة البرج فوجدت ٦٧° ٣٠َ أوجد بعد السيارة عن قاعدة البرج [٧٤,٦]

✍ [٢٤] من قمة فنار ارتفاعه ٥٠متر عن سطح الأرض وجد أن قياس زاوية انخفاض سفينة فى البحر ٢٢° ٣٩َ فما بعد السفينة عن قاعدة الفنار لأقرب متر [١٢٠متر]

✍ [٢٥] من قمة برج ارتفاعه ١٠٠متر وجد رجل أن قياس زاوية انخفاض نقطة على المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج ٣٥° ١٢َ أوجد بعد هذه النقطة عن قاعدة البرج لأقرب متر [١٤٢]

✍ [٢٦] من قمة فناره ارتفاعها ٢٠متر رصد ت زاوية انخفاض قارب فوجد أن قياسها ٢٩° ٤٥َ أوجد بعد القارب عن قاعدة الفنار [٣٥متر]

[٢٧] من قمة سطح منزل وجد شخص أن قياس زاوية انخفاض سيارة تقف على الطريق الأفقى المار بقاعدة البرج هى ٢٧َ ٣٦° فإذا كانت السيارة تقف على بعد ٢٥متر من قاعدة المنزل أوجد ارتفاع المنزل لأقرب متر [١٨متر]

[٢٨] من قمة برج ارتفاعه ٦٠ متر رصدت سفينتين فى البحر على شعاع واحد من قاعدة الصخرة وقاس زاويتين انخفاضهما فوجدهما ٤٧° ، ٣٥َ ٤١° على الترتيب أوجد البعد بين السفينتين .

[١٢ متر]

[٢٩] من قمة صخرة ارتفاعها ١٢٠متر رصد رجل زاوية انخفاض سفينة فى البحر فوجدها ٢٣° . أوجد بعد السفينة عن قاعدة الصخرة لأقرب متر [٢٨٣متر]

[٣٠] من قمة منارة ارتفاعها ٤٠متر رصد شخص سفينتين على مستقيم واحد من قاعدة المنارة وفى جهه واحدة منها فوجد أن قياس زاويتى انخفاضهما ٧َ ١٨° ، ١٢َ ٣٣° على الترتيب أوجد البعد بين السفينتين . [١٥٢,٨٢متر]

[٣١] من نقطة على سطح الأرض على بعد ٢٠مترا من قاعدة أحد الأعمدة الإنارة المقامة حديث فى أحد الشوارع قيست زاوية ارتفاع قمة العمود فوجد أن قياسها ٤٢ ١٦° . أوجد طول ارتفاع العمود. [٦متر]

[٣٢] من نقطة فى فناء مدرسة رصدت إحدى الطالبات زاوية ارتفاع قمة سارية علم فكان قياسها ٤٨َ ٣١° ، وكانت المسافة بين قاعدة السارية ، نقطة الرصد ٢٠ مترا .
فأوجد طول ارتفاع السارية لأقرب متر . [١٢,٤مترا]

[٣٣] إذا كان قياس زاوية ارتفاع قمة مئذنة من نقطة تبعد ١٠٠متر عن قاعدتها هو ٢٥َ ٣٢° فأوجد طول ارتفاع المئذنة . [٦٣,٥]

[٣٤] من نقطة على سطح الأرض على بعد ٥٠ مترا من قاعدة برج وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ٢َ ٧٥° أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر [١٨٧]

✍ [٣٥] وجد طالب وهو فى فناء المدرسة على بعد ٧,٥ متر من قاعدة نخلة أن قياس زاوية ارتفاعها ٣٥َ ٤٤° أوجد طول ارتفاع النخلة [٧,٤]

✍ [٣٦] من سطح منزل ارتفاعه ١٥ مترا على سطح الأرض رصدت قمة برج فوجدت أن زاوية ارتفاعها ١٦َ ٥٣° أوجد طول ارتفاع البرج عن سطح الأرض إذا كان المنزل على بعد ٥٠ مترا من قاعدة البرج [٨٢ متر]

✍ [٣٧] من قمة برج ارتفاعه ١٥٠ مترا وجد أن زاوية انخفاض جسم على سطح الأرض قياسها ٢٠َ ٣٥° احسب بعد الجسم عن قاعدة البرج [٢١١,٦]

✍ [٣٨] من سطح منزل ارتفاعه ٢٠ متر قيست زاوية انخفاض جسم موجود فى الشارع فكان قياسها ٤١َ ٢٩° فما بعد الجسم عن قاعدة المنزل [٣٥متر]

✍ [٣٩] قائم رأسى طوله ٨ متر فإذا كان طول ظله ٥ متر . أوجد زاوية شعاع الشمس عندئذ . [٥٨°]

✍ [٤٠] مئذنة ارتفاعها ٤٥ مترا ، أوجد زاوية ارتفاعها من نقطة تقع فى المستوى الأفقى المار بقاعدتها إذا كانت تبعد عنها ٣٨ متر . [٤٩َ ٤٩°]

✍ [٤١] لعب طفل بطائرة وكان طول الخيط ٥٠ مترا وقياس زاوية ارتفاع الطائرة ٢٠° فأوجد ارتفاع الطائرة عن الأرض علما بأن طول الطفل ١,٥ مترا . [١٨,٦ متر]

✍ [٤٢] من نقطة تبعد ٦٠ متر عن قاعدة برج وجد أن قياس زاوية ارتفاع البرج ٣٠َ ٣٨° فما هو ارتفاع البرج . وإذا تحرك الراصد تجاه البرج مسافة ٢٠ متر فأوجد عندئذ قياس زاوية ارتفاع البرج [٤٧,٧متر ، ٢َ ٥٠°]

✍ [٤٣] يستند سلم حريق طوله ١٥ متر على حائط رأسى وأرض أفقية فاذا كان طرف السلم السفلى يبعد عن الحائط مسافة قدرها ١٠ متر . أوجد : ❶ قياس زاوية ميل السلم على الأرض ❷ بعد الطرف العلوى للسلم عن الأرض [١١َ ٤٨° ، ١١,٢متر]

✍ [٤٤] أ ب برج حيث جـ ، ء نقطتان في المستوى الأفقي المار بقاعدة البرج حيث ء ∈ جـ ب ، رصدت قمة البرج من جـ ، ء فكان قياس زاويتا ارتفاع قمة البرج أ هما ٢٤ َ ٢٤° ، ٤٨ َ ٤٣° على الترتيب أوجد طول جـ ء علما بأن ارتفاع البرج = ٦٠ متر [٦٩,٧متر]

✍ [٤٥] من نافذة منزل يبعد ١٠٠ متر عن برج وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ٤٠° وقياس زاوية انخفاض قاعدة البرج ١٥° أوجد لأقرب متر كلا من ارتفاع النافذة وارتفاع البرج عن سطح الأرض [٢٧متر ، ١١١متر]

✍ [٤٦] أوجد قياس زاوية ارتفاع الشمس عندما يكون ظل سارية علم طولها ٣,٥ متر هو ٢ متر [٦٥ َ ٦٠°]

✍ [٤٧] مئذنتان ارتفاع كل منهما ٥٠° و البعد بينهما ١٠٠ متر ومن نقطة تقع على القطعة المستقيمة الواصلة بين قاعدتيهما وتبعد عن أحداهما ٦٠ متر رصدت زاويتا ارتفاعهما أوجد قياس كل من الزاويتين [٤٨ َ ٣٩° ، ٣٩ َ ١٩°]

✍ [٤٨] سارية علم مثبته فوق بناية ومن نقطة تبعد ٥٠ متر عن البناية وجد أن قياس زاويتي ارتفاع قمة وقاعدة السارية على الترتيب هما ٥٩° ، ٥٧° على الترتيب أوجد طول سارية العلم لأقرب متر [٦متر]

✍ [٤٩] قارب يقترب من صخرة ارتفاعها ٢٠ متر ، رصد قمة الصخرة في لحظة ما فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ١٥° وبعد ٢٠ دقيقة رصد قمة الصخرة مرة آخرى فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها اصبحت ١٨° احسب سرعة القارب [٠,٦٥م/د]

✍ [٥٠] يجرى رجل مبتعدا عن منزل ارتفاعه ٦٠ متر وفي لحظة معينة رُصد الرجل فكان قياس زاوية الانخفاض ٧٠° وبعد ١٢ دقيقة رصد الرجل مرة آخرى فكان قياس زاوية الانخفاض ١٠° أوجد سرعة الرجل لأقرب متر [٢٦م/د]

✍ [٥١] أ ، ب نقطتان متقابلتان على شاطئ نهر سار رجل بمحاذاة شاطئ النهر من أ إلى جـ حيث أ جـ = ٧٥ متر فإذا كان ق(∠ ب أ جـ) = ١٩ َ ٥٠° ، ق(∠ أ جـ ب) = ١٦ َ ٤٤° أوجد عرض النهر لأقرب متر

✍ (٥٢) عمود من أعمدة البرق ارتفاعه = ٦ م يُلقى ظلاً على الأرض طوله ٤م
أوجد زاوية ارتفاع الشمس عند هذه اللحظة .

✍ (٥٣) عمود من أعمدة الإنارة طوله = ٧م يلقى ظلاً على الأرض طوله ٥م
أوجد زاوية ارتفاع الشمس عند هذه اللحظة .

✍ (٥٤) إذا كان ارتفاع منزل = ٢٠ متر وكان طول ظله فى وقت ما يساوى ١٢ متر فما قياس زاوية ارتفاع الشمس فى هذا الوقت . [٥٩° ٢َ]

✍ (٥٥) وقف شخص على صخرة ارتفاعها ٥٠ متر ولاحظ سفينتين فى البحر على شعاع واحد من قاعدة الصخرة وقاس زاويتين انخفاضهما فوجدهما ١٠َ ٣٢° ، ٣٠َ ٤٩° على الترتيب أوجد البعد بين السفينتين . [٣٦,٨ متر]

✍ (٥٦) وقف شخص طوله ١,٥ متر على بعد ١٠ متر من قاعدة سارية علو مثبته رأسيا على سطح الأرض فوجد أن قياس زاوية ارتفاع أعلى نقطة فى سارية العلة هى ٢٢َ ٤٠° احسب طول السارية . [١٠ متر]

✍ (٥٧) يقف شخص على بعد ٨٥ متر من قاعدة برج على قمته سارية علم فلاحظ أن قياس زاويتى ارتفاع قمة السارية وقاعدة السارية ٥٦° ، ٥٤° على الترتيب أوجد طول سارية العلم . [٩متر]

✍ (٥٨) قارب يقترب من صخرة ارتفاعها ٢٠ متر رصدت قمة الصخرة فى لحظة ما فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ١٥° وبعد ٢٠ دقيقة رصدت قمة الصخرة مرة أخرى فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها أصبحت ١٨° احسب سرعة القارب [٠,٦٥ م/د]

✍ (٥٩) وقف رجلان فى جهتين مختلفتين من سارية علم مثبته رأسيا على سطح الأرض بحيث كان الرجلان وقاعدة السارية على مستقيم واحد فإذا رصد كل منهما زاوية ارتفاع قمة السارية وكان قياس زاويتى ارتفاعها هما ١٦َ ٥٤° ، ١٢َ ٤٧° على الترتيب أوجد البعد بين الرجلين إذا كان طول السارية ١٢ متر [١٩,٧متر]

✍ [٦٠] $\overline{أ ب}$ برج . قمته أ ، قاعدته ب وكان جـ ، ء نقطتان فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج حيث ء ∈ $\overleftarrow{جـ ب}$ رصدت قمة البرج من جـ ، ء مكان قياس زاويتا ارتفاع قمة البرج أ هما ٢٤َ ٢٤° ، ٤٨َ ٤٣° على الترتيب أوجد طول $\overline{جـ ء}$ علما بأن ارتفاع البرج ٦٠ متر [٦٩,٧متر]

✍ [٦١] من قمة فنار ارتفاعه ١٠٠ متر رصدت زاوية انخفاض قارب فوجد أن قياسها ٥٥َ ١٥° أوجد بعد القارب عن قاعدة الفنار ثم أوجد قياس زاوية انخفاض القارب عندما يصبح على بعد ٥٠ متر من قاعدة الفنار [٣٥٠,٧متر ، ٢٦َ ٦٣°]

✍ [٦٢] من سطح منزل ارتفاعه ٢٠ مترا ، وجد أن قياس زاوية انخفاض قاعدة المنزل الذى أمامه مباشرة ٢٦َ ٣٨° . فما عرض الشارع ؟

✍ [٦٣] رجل يسير على مستوى مائل يميل على الأفقى بزاوية قياسها ١٩َ ١٥° . أوجد المسافة التى يسيرها على المستوى ليرتفع ١٢ مترا عن سطح الأرض .

✍ [٦٤] من قمة جبل ارتفاعه ٩٧٥ مترا عن سطح الأرض وجد أن قياسى زاويتى انخفاض قمة تل وقاعدته هما ١٤َ ٣٧° ، ٢٥َ ٦٣° على الترتيب . فما ارتفاع التل ؟ علما بأن قاعدة الجبل وقاعدة التل فى مستوى أفقى واحد .

✍ [٦٥] أ ، ب نقطتان متقابلتان على شاطئ نهر سار رجل بمحاذاة شاطئ النهر من أ إلى جـ حيث أ جـ = ١٠٠ متر فإذا كان ق(∠ ب أ جـ) = ٩٠° ، ق(∠ أ جـ ب) = ١٦َ ٤٠° أوجد عرض النهر لأقرب متر [٨٥متر]

✍ [٦٦] أ ، ب نقطتان على أحد شاطئ نهر ، جـ نقطة على الشاطئ الآخر . فإذا كان ق(∠ ب أ جـ) = ٤٠° ، ق(Δ أ ب جـ) = ٢٥° ، أ ب = ١٠٠متر فاحسب عرض النهر لأقرب متر .

✍ [٦٧] أبصر رجلان منطادا ثابتا فى الجو فوجد الأول أن قياس زاوية ارتفاع المنطاد ٢٤َ ٥٨° ووجد الثانى أن قياس زاوية ارتفاع نفس المنطاد فى نفس اللحظة ١٦َ ٣٣° . أوجد ارتفاع المنطاد علما بأن المسافة بين الرجلين ٢٠٠٠ مترا وأن موقع المنطاد على الأرض ينطبق على القطعة المستقيمة الواصلة بين موقعى الرجلين .

✍ [٦٨] قاس شخص زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها يساوى ٤٩َ ٣٨° ثم سار مسافة ٥٠ مترا نحو البرج وقاس زاوية ارتفاع قمة البرج مرة أخرى فوجد أن قياسها يساوى ٣٧َ ٤٢° . أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر .

✍ [٦٩] من نقطة أمام مبنى تبعد عنه ٥٠ مترا وجد أن قياس زاويتى ارتفاع قاعدة وقمة سارية علم فوق المبنى ٣٥° ، ٤٠َ ٤٧° على الترتيب . أوجد ارتفاع السارية لأقرب متر .

✍ [٧٠] تتحرك طائرة فى خط مستقيم بسرعة ٦٠٠كم/س . فاذا كان قياس زاوية ارتفاع الطائرة من نقطة على سطح الأرض فى لحظة ما ١٦° ثم أصبحت بعد دقيقة واحد ٥٧° فأوجد ارتفاع الطائرة لأقرب متر .

✍ [٧١] من نقطة تبعد عن قاعدة مئذنة ٥٠ متر ، وجدنا أن زاوية ارتفاع قمتها ٣٠َ ٢٧° . فما ارتفاع المئذنة ؟

✍ [٧٢] وجد رجل أن زاوية ارتفاع قمة جبل هي ١٠َ ٣٠° ، ولم سار نحو الجبل مسافة ٨٠٠ م وجد أن زاوية الارتفاع ٥٠° ، فما ارتفاع قمة الجبل ؟

✍ [٧٤] باخرتان غادرتا الميناء في الوقت نفسه ، الأولى أبحرت بسرعة ٤٠كم / ساعة في اتجاه ٤٢° شمال شرقي ، والثانية أبحرت بسرعة ٥٠كم /ساعة في اتجاه ٤٨° الجنوب الشرقي ،كم تبعدان عن بعضهما بعد ٣ ساعات من مغادرة الميناء ؟



تمارين [١٤] على القطاع الدائرى

[١] أكمل مايأتى

❶ محيط القطاع الدائرى = ...

❷ القطاع الدائرى هو ....

❸ مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته نق ، قياس زاويته المركزية هـ ْ تساوى ....

❹ قطاع دائرى طول قطر دائرته يساوى طول قوسه يساوى ١٢ سم فان محيطه يساوى ...... سم

❹ مساحة القطاع الدائرى الذى فيه ل = ٦ سم نق = ٤ سم يساوى ....

❺ مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته يساوى ٤ سم ،ومحيطه ٢٠ سم تساوى ....

❻ مساحة الدائرى الذى طول قوسه ٥ سم ، وطول نصف قطر دائرته ١٥ سم تساوى ...... سم²

❼ إذا كان محيط قطاع دائرى ١٠ سم ، وطول قوسه ٥ سم فان نق = ... سم

❽ قطاع دائرى مساحته ٣٠ سم² ،طول قوسه ١٠ سم فيكون طول نصف قطر دائرته يساوى ...... سم

❾ قطاع دائرى مساحته ٤٠٠ سم² ، وطول نصف قطر دائرته ٢٠ سم فان طول قوسه يساوى ..... سم

❿ محيط القطاع الدائرى الذى مساحته ٢٤ سم² ،طول قوسه ٨ سم يساوى ....

⓫ مساحةالقطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ٦ سم ، وقياس زاويته المركزيه٢,٥ ْ تساوى..... سم²

⓬ قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ٧ سم ، محيطه ٢٧ سم فيكون طول قوسه ...... سم ، مساحته .... سم²

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

❶ مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته ١,٢ ْ وطول نصف قطر دائرته ٤ سم يساوى

(١) ٤,٨ سم²　(٢) ٩,٦ سم²　(٣) ١٢,٨ سم²　(٤) ١٩,٦ سم²

❷ محيط القطاع الدائرى الذى طول قوسه ٤ سم وطول قطر دائرته ١٠ سم يساوى

(١) ١٤ سم　(٢) ٢٠ سم　(٣) ١٨ سم　(٤) ٩ سم

❸ مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته ١٢٠° وطول نصف قطر دائرته ٣ سم تساوى

(١) ٣ π سم²　(٢) ٦ π سم²　(٣) ٩ π سم²　(٤) ١٢ π سم²

❹ مساحة القطاع الدائرى الذى محيطه ١٢ سم وطول قوسه ٦ سم تساوى

(١) ٦سم٢ (٢) ٩سم٢ (٣) ١٢سم٢ (٤) ١٨سم٢

❺ إذا كانت مساحة قطاع دائرى تساوى ١١٠ سم٢ وقياس زاويته ٢,٢ء فان طول نصف قطر دائرته يساوى

(١) ٢سم (٢) ٥سم (٣) ١٠سم (٤) ٢٠سم

❻ مساحة القطاع الدائرى = ...

(١) $\frac{1}{2}$ نق ل (٢) $\frac{1}{2}$ θء نق (٣) مساحة الدائرة × $\frac{\theta^{ء}}{2\pi}$ (٤) مساحة الدائرة × $\frac{س^{\circ}}{180^{\circ}}$

❼ مساحة القطاع الدائرى الذى طول قوسه ١٠سم ، وطول نصف قطر دائرته ٥سم تساوى........سم٢

(١) ٥٠ (٢) ٢٥ (٣) ١٢,٥ (٤) ١٠٠

❽ إذا كان محيط قطاع دائرى ٨سم ، طول قوسه ٢سم فان : نق = ...

(١) ٦سم (٢) ٢سم (٣) ٣سم (٤) ٤سم

❾ قطاع دائرى مساحته ١٥سم٢ وطول قوسه ٣سم فان : نق = ...

(١) ٥سم (٢) ١٠سم (٣) ٢,٥سم (٤) ١٥سم

❿ القطاع دائرى محيطه ٤٤سم ، وطول نصف قطر دائرته ١٤سم فان طول قوسه يساوى ......

(١) ١٦سم (٢) ٨سم (٣) ٣٢سم (٤) ٤سم

⓫ قياس زاوية قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته نق سم ، ومساحته $\frac{\pi}{6}$ نق٢ سم٢ يساوى ....

(١) ٣٠° (٢) ٦٠° (٣) ٩٠° (٤) ٤٥°

⓬ قطاع دائرى طول قوسه ٤ل سم ، وطول نصف قطر دائرته = نق سم فان محيطه = ... سم

(١) ل + ٢نق (٢) نق + ٢ل (٣) ٢ (نق + ٢ل) (٤) ٢ (ل + ٢نق)

✍ [٣] قطاع دائرى مساحته ٤٠سم٢ ، وطول قوسه ٨سم أوجد محيطه .

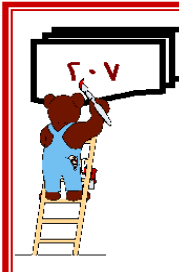
✍ [٤] قطاع دائرى محيطه ٢٨سم ، وطول نصف قطر دائرته ٧سم

، أوجد مساحته وقياس زاويته بكلا التقديرين الدائرى والستينى [٤٩سم٢ ، ٢ء ، ٣٥َ ١١٤°]

✍ [٥] قطاع دائرى مساحته ٢٥سم٢ ، وقياس زاويته المركزية ٠,٥ء .

احسب طول نصف قطر دائرته وطول قوسه . [١٠سم ، ٥سم]

✍ [٦] قطاع دائرى محيطه ١٢سم ، ومساحته ٨سم٢ احسب طول نصف قطر دائرته



، وقياس زاويته بكلا التقديرين الدائرى والستينى　[٢سم ، ٤سم ، ١١َ ٢٢٩° ، ١َ ، ١٨َ ٥٧°]

✍ [٨] أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته = ١٠سم ،

وقياس زاويته المركزية ٦٠° (π = ٣,١٤)　[٥٢ $\frac{١}{٣}$ سم٢]

✍ [٩] دائرة مركزها م ، وطول قطرها ٢٠سم ، م‾ا‾ ، م ب نصفا قطر فيها بحيث

ق (∠ ا م ب) = ٧٢° أوجد ❶ مساحة القطاع الأصغر فى هذه الدائرة　❷ طول ⌒ا ب

✍ [١٠] قطاع دائرى محيطه = ٥٠سم ، وطول نصف قطر دائرته = ١٤سم

❶ أوجد مساحة القطاع　❷ القياس الستينى لزاويته　[١٥٤سم٢ ، ٩٠°]

✍ [١١] ا ب جـ ∆ متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠سم ، رسم القوس من دائرة مركزها ا

ليقطع ا‾ب‾ فى س ، ا جـ فى ع ، ويمس القاعدة ب‾جـ‾ فى ص

أوجد مساحة الجزء من سطح ∆ المحدد بالقوس ⌒س ص ع ، القطع ب‾جـ‾ ، ب‾س‾ ، ج‾ع‾　[٤سم٢]

✍ [١٢] ∆ س ص ع متساوى الأضلاع طول ضلعه = ٤٢سم ، رسمت ثلاث قطاعات دائرية مراكزها رؤوس ∆ ونصف قطر كلا منها ٢١سم ، وزواياها هى زوايا رؤوس ∆ أوجد مساحة الجزء من سطح ∆ المحدد بأقواس القطاعات ($\sqrt{٣}$ = ١,٧٣٢ ، π = $\frac{٢٢}{٧}$)　[٧١سم٢]

✍ [١٣] مربع طول ضلعه ٢٨سم ، رسمت أربعة قطاعات دائرية مراكزها رؤوس المربع ونصف قطر دائرة كل منها = ١٤سم ، وزواياها هى زوايا رؤوس المربع ،

أوجد مساحة المربع المحدد بأقواس هذه القطاعات .　[١٦٨سم٢]

✍ [١٤] ا ب جـ ∆ قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ ا) = ٦٠° ، ا ب = ١٠سم ، رسم قوس من دائرة مركزها ا وطول نصف قطرها = ١٠سم مارا بنقطة ب وقاطعا ا‾جـ‾ فى ء .

أوجد مساحة الجزء من سطح ∆ المحدد بالقطع ب‾جـ‾ ، ء‾جـ‾ و القوس ⌒ب ء .　[٣٤,٢٥سم٢]

Mr : Walid Rushdy　01112467874　01062220750



✍ [١٥] م أ ، م ب نصفا قطرين من دائرة مركزها م ، وطول نصف قطرها = ٨سم

، فاذا كان ق (∠ أ م ب) = ٣٠° ، رسم ب جـ ⊥ م أ ليقطعه فى جـ .

أوجد مساحة الجزء من سطح الدائرة المحدد بالقطع ب جـ ، أ جـ و القوس الأصغر أ ب [٢,٩سم٢]

✍ [١٦] أ ب جـ ∆ قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ٣٠سم ، ب جـ = ٤٠سم ، رسم قوس من دائرة مركزها ب ليمس أ جـ فى ء ويقطع أ ب فى س ، ب جـ فى ص ، احسب مساحة الجزء المحدود بالقوس سءص و القطع أ س ، أ جـ ، جـ ص [١٤٧,٨٤سم٢]

✍ [١٧] أ ب جـ ء معين طول ضلعه ٢٠سم ، فيه ق (∠ أ) = ٦٠° ، رسم قوس من دائرة مركزها أ وطول نصف قطرها ٢٠سم ، مارا بالنقطتين ب ، ء أوجد مساحة الجزء من سطح المعين المحدد بالقوس ب ء و القطع ب جـ ، جـ ء [١٣٦,٩٨سم٢]

✍ [١٨] أ ب جـ ∆ فيه أ ب = ٩سم ، ب جـ ١٢سم ، رسم قوس من دائرة مركزها جـ وطول نصف قطرها ١٢سم ، مارا بالنقطة ب وقاطعا أ جـ فى ء ، أوجد مساحة الجزء المحدد من سطح المثلث بالقطع أ ب ، أ ء ، القوس ب ء علما بأن أ ب يمس القوس ب ء [٧,٦٧سم٢]

✍ [١٩] أ نقطة خارج دائرة مركزها م ، رسم أ ب مماسا للدائرة فى ب فاذا كان أ م = ٢٨سم ، ق (∠ب أ م) = ٣٠° ، وكانت الدائرة تقطع أ م فى جـ ، أوجد مساحة سطح المحدد بالقطع أ ب ، أ جـ و القوس الأصغر جـ ب [٦٧,١٧سم٢]

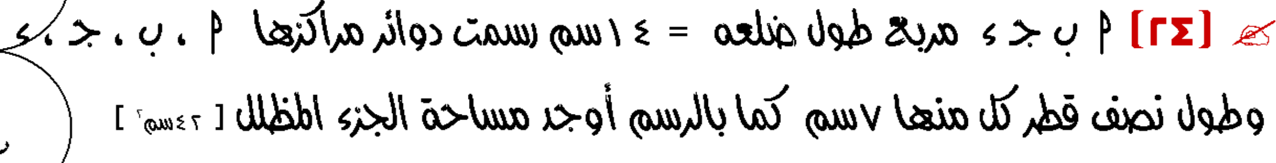
✍ [٢١] ثلاث دوائر طول نصف قطر كل منها = ٥سم ، تمس كلا منهما لأخرى مثنى مثنى أوجد المساحة المحصورة بين الثلاث دوائر [٤,٠٥سم٢]

✍ [٢٢] دائرتان متحدتى المركز م ، رسم أ ب وت فى الدائرة الكبرى طولة ١٤سم ، ليمس الدائرة الصغرى فى جـ ، رسم م أ فقطع الدائرة الصغرى فى س فاذا كان طول نصف قطر الدائرة الصغرى = ٧سم ، أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين القطع أ جـ ، أ س و القوس الأصغر جـ س [٥,٢٥سم٢]

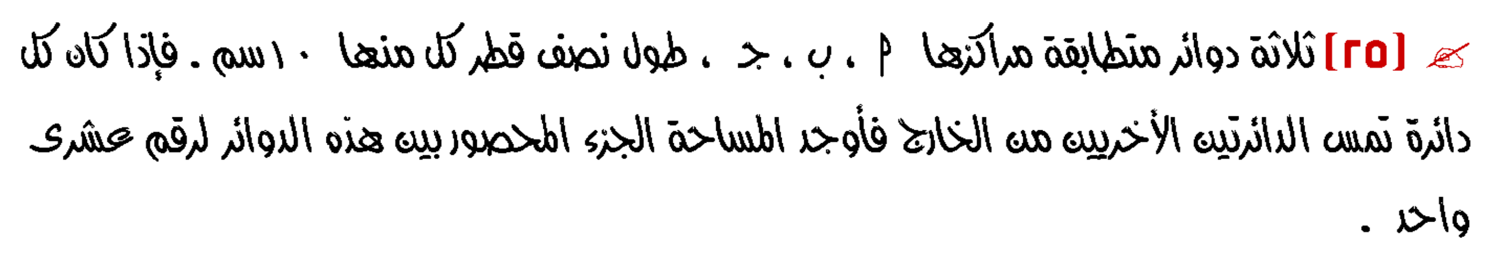
✍ [٢٣] أ ب جـ ء مربع رسمت ٤ قطاعات متطابقة مراكزها رؤوس المربع بحيث يمس كل منها قطاعين آخرين . فإذا كان طول ضلع المربع = ل فأثبت أن :

مساحة الجزء المحصور بين القطاعات = $\frac{1}{4}$ ل^2 (٤ – π)

✍ [٢٤] أ ب جـ ء مربع طول ضلعه = ١٤سم رسمت دوائر مراكزها أ ، ب ، جـ ، ء وطول نصف قطر كل منها ٧سم كما بالرسم أوجد مساحة الجزء المظلل [٤٢سم^2]



✍ [٢٥] ثلاثة دوائر متطابقة مراكزها أ ، ب ، جـ ، طول نصف قطر كل منها ١٠ سم . فإذا كان كل دائرة تمس الدائرتين الأخريين من الخارج فأوجد المساحة الجزء المحصور بين هذه الدوائر لرقم عشرى واحد .

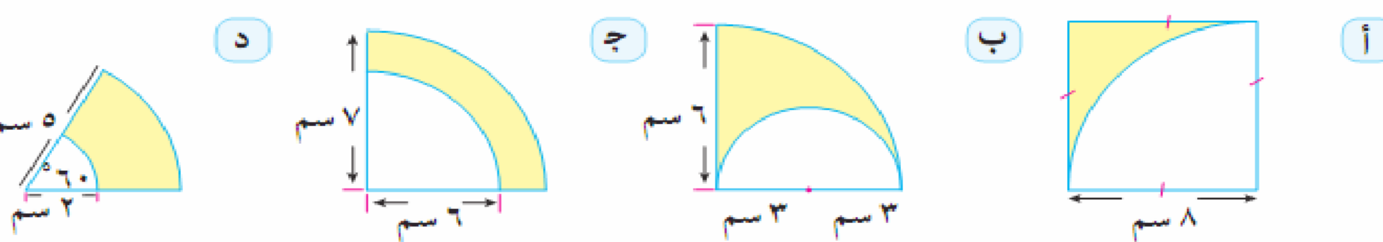


✍ [٢٦] الربط بالجغرافيا

إذا علمت أن خط الاستواء هو دائرة طول نصف قطرها ٦٣٨٠ كم فاوجد المسافة بين مدينتين على خط الاستواء إذا كان القوس الواصل بينهما يقابل زاوية قياسها ٣٠° عند مركز الأرض

✍ مثال [٢٧]

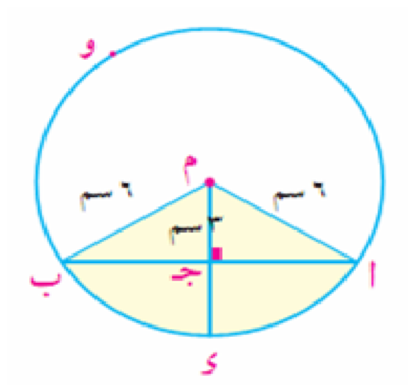
اوجد بدلالة π مساحة الجزء المظلل فى كل شكل من الأشكال الآتية



✍ [٢٨] أ ب جـ ء شبه منحرف فيه ق (ب) = ق (جـ) = ٩٠° ، أ ب = ١٠سم ، ب جـ = ٦سم ، جـ ء = ٢سم رسم قوسا مركزه أ وبفتحة تساوى طول $\overline{أ ء}$. اثبت أن ب تقع على الدائرة ثم أوجد مساحة سطح المنطقة المحصورة بين $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ ء}$ و القوس $\overset{\frown}{ب ء}$ [٤ سم^2]

تمارين [١٥] على القطاع الدائرى

[١] فى الشكل المرسوم أكمل ما يأتى



م دائرة طول نصف قطرها ٦سم م جـ عمودى على أ ب ، م جـ = ٣سم

١. ارتفاع القطعة الدائرية الصغرى أ ى ب = ... سم
٢. ارتفاع القطعة الدائرية الكبرى أ و ب = ...سم
٣. قياس زاوية القطعة الدائرية الصغرى أ ى ب = ...
٤. قياس زاوية القطعة الدائرية الكبرى أ و ب = ...
٥. مساحة سطح مثلث م أ ب = ...سم^2
٦. مساحة القطاع الدائرى م أ ى ب بدلالة π = ...سم^2
٧. مساحة القطع الصغرى بدلالة π = ... سم^2

[٢] أكمل ما يأتى

١. مساحة القطعة الدائرية التى نصف قطر دائرتها ٢٠سم ، وقياس زاويتها المركزية = ٣٠° تساوى ......
٢. مساحة القطعة الدائرية التى طول قطر دائرتها ١٠سم ، وقياس زاويتها المركزية = ٤٤َ ٧٢° تساوى ......
٣. مساحة القطعة الدائرية الكبرى التى طول نصف قطرها ٥سم ، طول وترها ٥سم تساوى ....
٤. مساحة القطعة الدائرية التى نصف قطر دائرتها ٤سم ، وقياس زاويتها المركزية = ١,٢٥ء تساوى ......
٥. مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطرها ١٠سم ، طول وترها ١٠$\sqrt{3}$ تساوى ....
٦. مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطرها ١٠سم ، طول وترها ١٦سم تساوى ....
٧. مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطرها ٩سم ، طول قوسها ٣٣سم تساوى ....
٨. مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطرها ٦سم ، طول ارتفاعها ٣سم تساوى ....
٩. مساحة القطعة الدائرية التى طول قطرها ١٣سم ، طول ارتفاعها ٤سم تساوى ....
١٠. مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطرها ٦سم ، طول وترها ٧,٢سم تساوى ....
١١. مساحة القطعة الدائرية التى طول قطر دائرتها ٨سم ، وقياس زاويتها المركزية = $\frac{7\pi}{6}$ تساوى ....
١٢. مساحة القطعة الدائرية التى طول ارتفاعها ٢سم ، طول وترها ١٢سم تساوى ....

[٣] اوجد مساحة القطعة الدائرية التى

❶ طول نصف دائرتها ١٢ سم وقياس زاويتها يساوى ١,٤ ^ء^

❷ اوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف دائرتها ٨سم وقياس زاويتها تساوى ١٣٥°

❸ اوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف دائرتها ١٤سم وطول قوسها ٢٢سم

[٤] فى الشكل المرسوم

أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل الدائرة م التى طول نصف قطرها ٨سم

اوجد مساحة كل جزء من القطع الدائرية المظللة

[٥] اوجد مساحة القطعة الدائرية الكبرى التى طول وترها يساوى طول نصف قطر دائرتها يساوى ١٢سم

[٦] اوجد مساحة القطعة الدائرية التى ❶ طول وترها ٦سم وطول نصف قطر دائرتها ٥سم

❷ ارتفاعها ٥سم وطول نصف قطر دائرتها ١٠سم

[٧] وتر فى دائرة طوله ٨سم على بعد ٣سم من مركزها اوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى الحادثة من تقاطع هذا الوتر مع سطح الدائرة

[٨] اوجد مساحة القطعة الدائرية الكبرى التى طول وترها ١٢ سنتيمترا

وارتفاعها ٢ سنتيمتر مقربا الناتج لاقرب سنتيمتر مربع

[٩] اوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ١٠سم قياس زاويتها ٢,٢ ^ء^ مقربا الناتج لاقرب رقمين عشرين

[١٠] أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ١٠سم ، قياس زاويتها ٢,٢ ^ء^ مقربا الناتج لأقرب رقمين عشريين .

[١١] جـ نقطة تنتمى للدائرة م ، وطول نصف قطر دائرتها = ١٠سم ، أ ب وتر فيها حيث

ق (∠ أ جـ ب) = ٧٥° أوجد مساحة القطعة الصغرى التى وترها أ ب [١٠٥,٩٥سم^2]

[١٢] قطاع دائرى مساحته = ٢٣١سم^2 ، وطول نصف قطر دائرته ٢١سم ، قياس زاويته المركزية هـ .

احسب مساحة القطعة الدائرية التى قياس زاويتها المركزية (٢π – هـ) فى نفس الدائرة [١٣٤٥,٩٥سم^2]

[١٣] قطاع دائرى مساحته ٣٧٦,٨سم^2 ، وطول قوسه ٣٧,٦٨سم ،

أوجد ❶ طول نصف قطر دائرته

❷ مساحة القطعة الدائرية التى قياس زاويتها يساوى نصف قياس زاوية القطاع المذكور فى نفس الدائرة [٢٠سم ، ٢٦,٧سم^2]

[١٤] م أ ب Δ متساوى الساقين فيه م أ = م ب = ١٢سم رسمت دائرة مركزها م وطول نصف قطر دائرتها م أ فإذا كانت مساحة القطاع م أ ب = $\frac{٢٦٤}{٣}$ سم²

أوجد ❶ القياس الستينى للزاوية أ م ب ❷ مساحة القطعة الصغرى التى وترها $\overline{أ ب}$ [٧٠° ، ٢٠,٣٤سم²]

[١٥] دائرة مركزها م ، وطول نصف قطرها = ١٢سم ، $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ ء}$ وتران متوازيان فيها وفى جهة واحدة من مركزها فاذا كان ق (∠ أ م ب) = ١٢٠° ، ق (∠ جـ م ء) = ٥٤° أوجد مساحة الجزء من سطح الدائرة المحصور بينها وبين الوترين $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ [٧٨,٨٦سم²]

[١٦] $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران فى دائرة طول نصف قطرها ٨سم ، أ ب = ٨سم ، جـ ء = ٨ $\sqrt{٣}$ سم اثبت أن :

مساحة الجزء من سطح الدائرة المحصور بينها وبين الوترين $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ تساوى $\frac{٣٢\pi}{٣}$ سم² علما بأن الوترين فى جهة واحدة من المركز م .

[١٧] رسم Δ متساوى الأضلاع داخل دائرة نصف قطرها ٦سم . أوجد لأقرب رقم عشرى واحد مساحة كل من القطع الدائرية الصغرى الحادثة من ذلك

[١٨] رسم سداسى منتظم داخل دائرة طول نصف قطرها ٢٠سم . أوجد مساحة كل من القطع الدائرية الصغرى الحادثة من ذلك .

[١٩] وتر فى دائرة طوله ٨سم على بعد ٣سم من مركز الدائرة . أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى الحادثة على الوتر .

[٢٠] قطعة دائرية ارتفاعها ٣سم ، وطول نصف قطر دائرتها ٥سم . فما مساحتها لأقرب سم² ؟

أوجد مساحة القطعة الدائرية الكبرى من دائرة طول نصف قطرها ٥سم فإذا كان طول وتر القطعة ٦سم ؟

[٢١] أ ب جـ Δ متساوى الأضلاع فيه طول ضلعه ٣٠سم ، رسمت دائرة تمر برؤوسه ، اثبت أن : طول نصف قطر الدائرة = ١٠ $\sqrt{٣}$ سم ثم احسب مساحة القطعة الدائرية الصغرى [١٨٤,٣٨سم²]

[٢٢] أ ب جـ Δ النسبة بين قياسات زواياه الداخلة ٣ : ٤ : ٥ أوجد مساحات القطع الثلاثة المحصورة بين أضلاع هذا المثلث و الدائرة المارة برؤوسه التى طول نصف قطرها = ١٠سم [٢٨,٥٧ سم٢ ، ٦١,٤٦ سم٢ ، ١٠٥,٩٥سم٢]

[٢٣] دائرة قطرها $\overline{أب}$ طوله ١٥سم ، جـ ∋ للدائرة بحيث ق(∠ب أ جـ) = ٣٥° ، احسب مساحة القطعة الصغرى التى وترها $\overline{أجـ}$ [٢٧,٦سم٢]

[٢٤] أ ب جـ Δ متساوى الساقين أ ب = أ جـ ، ق(∠ب أ جـ) = ٤٠° ، وسمت دائرة تمر برؤوس Δ أ ب جـ وطول نصف قطر دائرتها ٦سم احسب مساحة القطعة الدائرية $\overline{أب}$ الصغرى [٣٢,٤سم٢]

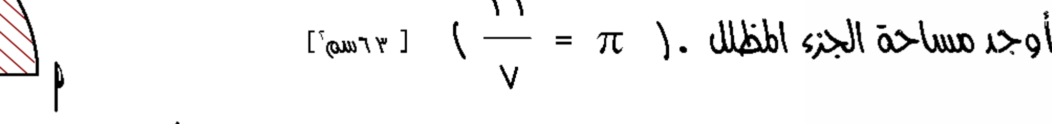
[٢٥] $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ وتران فى دائرة طول كل منهما $6\sqrt{3}$ سم ، ق(∠ ب أ جـ) = ٦٠° ، أوجد مساحة الأجزاء الثلاثة التى يقسم بها هذين الوترين سطح الدائرة [٢٢,١ سم٢ ، ٦٨,٩ سم٢ ، ٢٢,١سم٢]

[٢٦] $\overline{أب}$ قطر فى دائرة ، جـ ∋ الدائرة بحيث كان أ جـ = ٨سم ، أ ب = ١٠سم ، أوجد مساحة القطعة الصغرى التى وترها $\overline{أجـ}$ [١١,٢سم٢]

[٢٧] أ ب جـ Δ متساوى الساقين فيه أ ب = أ جـ = ١٠سم ، ب جـ = ١٢سم ، ء منتصف $\overline{بجـ}$ ، رسمت دائرة مركزها أ وطول نصف قطرها = أ ء فإذا قطعت الدائرة $\overline{أب}$ فى هـ ، $\overline{أجـ}$ فى و احسب مساحة القطعة الدائرية هـ ء و [١٠,٤٨سم٢]

[٢٨] فى الشكل المقابل :

ق(∠ أ ب جـ) = ٤٥° ، $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة طوله ١٤سم ،



أوجد مساحة الجزء المظلل . ($\pi = \frac{22}{7}$) [٦٣سم٢]

[٢٩] دائرتان طولا نصفى قطريهما ١٢سم ، ١٦سم و البعد بين مركزيهما ٢٠سم

أوجد مساحة المنطقة المظللة المشتركة بين الدائرتين [١٠٦,١٢سم٢]

[٣٠] دائرتان طولا نصفى قطريهما ٦سم ، ٨سم و البعد بين مركزيهما ١٠سم

أوجد مساحة المنطقة المظللة المشتركة بين الدائرتين [٢٦,٦سم٢]

[٣١] $\overline{أ ب}$ وتر فى دائرة يقابل زاوية مركزية قياسها ١٢٠° اثبت أن : النسبة بين مساحتى الجزأين اللذين ينقسم إليهما سطح الدائرة بالوتر أ ب تساوى $٤\pi - ٣\sqrt{٣} : ٨\pi + ٣\sqrt{٣}$

[٣٢] اثبت أن : أى وتر فى دائرة يقسمها إلى قطعتين دائريتين النسبة بين مساحتيهما

$= \frac{هـ - جا هـ}{٢\pi - هـ + جا هـ}$ حيث هـ قياس الزاوية المركزية المقابلة للوتر .

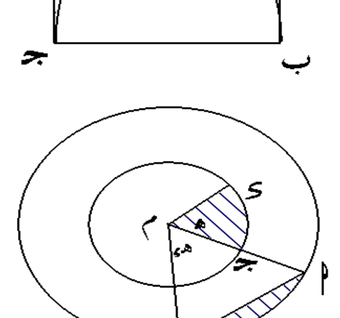
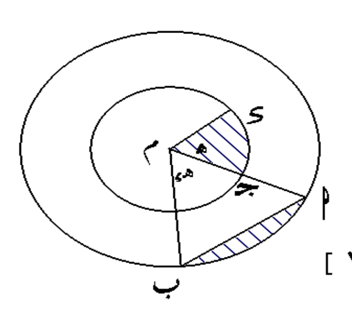
وإذا كان قياس الزاوية المركزية التى تقابل أحد الأوتار فى الدائرة ٣٠° فما النسبة بين مساحتى القطعتين الحادثتين ؟

[٣٣] أ ب جـ Δ قائم الزاوية فى جـ فيه أ جـ = ٣ ب جـ رسمت دائرة مارة برؤوسه . أوجد النسبة بين مجموع مساحتى القطعتين الصغريين اللتين وتريهما $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ب جـ}$ إلى نصف مساحة سطح الدائرة .

[٣٤] $\overline{أ ب}$ قطر فى دائرة طوله ٦سم ، جـ نقطة على دائرة بحيث : ق($\angle$ جـ ب أ) = ١٥° أوجد بدلالة π الفرق بين مساحتى القطعتين الصغريين اللتين وتريهما $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{أ جـ}$.

[٣٥] فى الشكل المقابل :

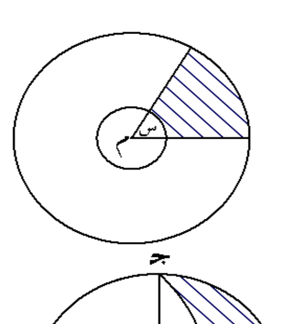
أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ٤سم . رسم قوسان متساويان فى الطول $\overset{\frown}{أ و}$ ، $\overset{\frown}{ب و}$ مركزى دائرتيهما هما ب ، أ على الترتيب وطول نصف قطر كل منهما ٤سم .
احسب مساحة المنطقة المظللة .

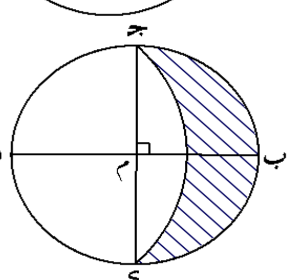
[٣٦] دائرتان متحدتى المركز فى م ، فإذا كان م أ = ٢نق ، م ء = نق ، ق($\angle$ أ م ب) = ق($\angle$ جـ م ء) = هـ^{ء}
أوجد النسبة بين هـ^{ء} ، جا هـ إذا عالم مساحتى الجزأين المظللين متساويتان . [٤ : ٣]



[٣٧] م مركز دائرتين طولا نصفى قطريهما ١سم ، ٤سم
فإذا كانت مساحة الجزء المظلل تمثل سدس مساحة الدائرة الكبرى
فأوجد قيمة س بالدرجات [٦٤°]



[٣٨] م دائرة طول نصف قطرها نق ، $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ قطران متعامدان
رسم $\overset{\frown}{جـ ء}$ مركزه نقطة أ وطول نصف قطره أ جـ
أوجد : مساحة المنطقة المظللة . [نق^{٢} سم^{٢}]





مثال [٣]

أوجد مساحة الشكل الثمانى الذى طول ضلعه ٦ سم ، مقربا الناتج لأقرب رقمين عشريين .

∵ ن = ٨ ، س = ٦سم ،

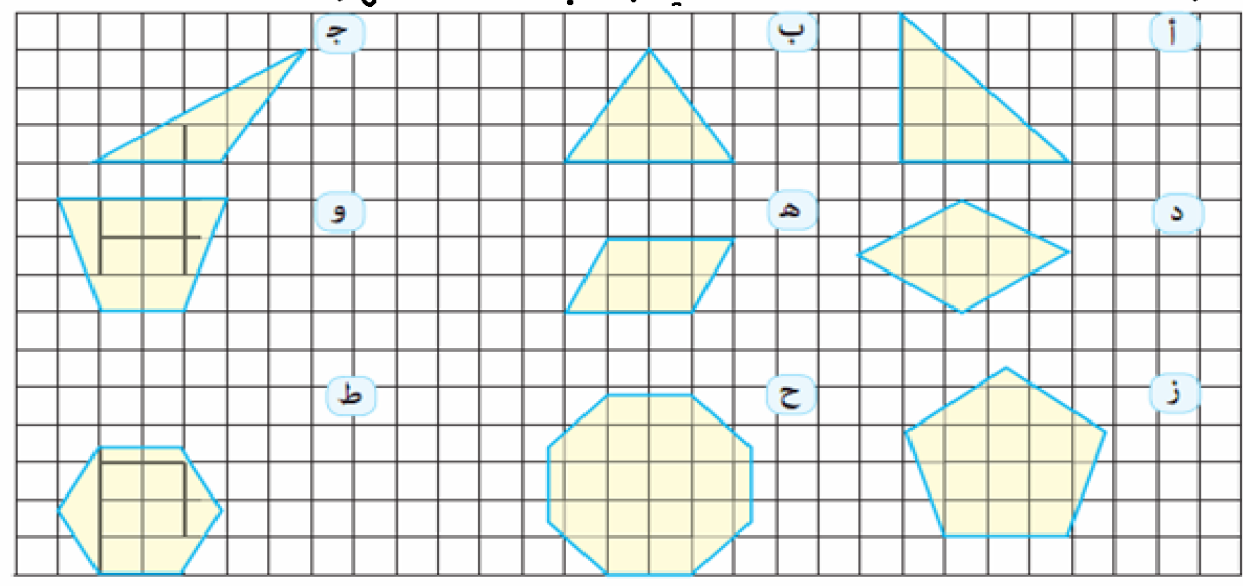
مساحة المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن وطول ضلعه س

$= \frac{١}{٤} \times ن \times س^٢ \times ظتا \frac{\pi}{ن}$

∴ المساحة $= \frac{١}{٤} \times ٨ \times (٦)^٢ \times ظتا \frac{١٨٠^\circ}{٨} = ١٧٣,٨$ سم^٢

تمارين [١٦] على المساحات

[١] اوجد مساحة كل شكل من الأشكال الآتية باعتبار أن □ هى وحدة المساحة



[٢] اوجد مساحة المثلث أ ب جـ فى كل من الحالات الآتية

١. أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم ، ق (∠ ب) = ٩٠°
٢. أ جـ = ١٢ سم وطول العمود المرسوم من ب على أ جـ يساوى ٧ سم
٣. أ ب = ١٦سم ، ب جـ = ٢٠سم ، ق (∠ ب) = ٤٦°
٤. أ ب = ٨سم ، ب جـ = ٧سم ، أ جـ = ١١سم

[٣] اوجد مساحة الشكل م ب جـ ء فى كل من الحالات الآتية

١ متوازى أضلاع فيه م ب = ٨سم ، ب جـ = ١١ سم ، ق(∠ب) = ٦٠°

٢ شبه منحرف طولا قاعدته المتوازيتين م ء ، ب جـ يساوى ٧سم ، ١١سم على الترتيب وطول العمود المرسوم من ء على ب جـ يساوى ٦سم

[٤] معين فيه م ب = ٨سم وقياس الزاوية المحصورة بين ضلعين متجاورين فيه تساوى ٥٨°

[ ] اوجد مساحة كل مضلع منتظم من المضلعات الاتية مقربا الناتج لاقرب جزء من عشرة

١ خماسى منتظم طول ضلعه يساوى ١٦سم

٢ سداسى منتظم طول ضلعه يساوى ١٢سم

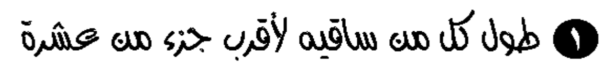
[٥] الشكل المقابل

يرسم مجموعة من الدرجات تؤدى الى مدخل مجمع سكنى على شكل شبه منحرف متساوى الساقين قاعدته الكبرى لأسفل وعرضها ٧ أمتار وقاعدتها الصغرى لأعلى وعرضها ٣ امتار ويميل كل من ساقيه على القاعدة السفلى بزاوية قياسها ٧٥ اوجد

٣ متر

٧٥° ٧٥°

٧ متر



١ طول كل من ساقيه لأقرب جزء من عشرة ٢ مساحة شبه منحرف لأقرب متر

[٦] أحواض زينة صمم حوضا للأسماك الزينة قاعدته على شكل خماسى منتظم طول قطره ٧٢ سم اوجد لاقرب سنتيمتر مربع مساحة قاعدته

[٧] يصمم كريم حديقة لمنزله ويرغب ان يكون الجزء المخصص للزهور على شكل سداسى منتظم مساحته ٥٤$\sqrt{3}$ متر مربع اوجد طول ضلعه

تمارين (١) على الكميات القياسية والمتجهة

[١] ارسم متجه موضع الذى تمثله المتجهات :

① $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ١)　② $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، —٢)　③ $\overrightarrow{جـ}$ = (٠ ، —٣)

④ $\overrightarrow{د}$ = (٠ ، ٤)　⑤ $\overrightarrow{هـ}$ = (—٣ ، —١)　⑥ $\overrightarrow{م}$ = —٥ $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$

⑦ $\overrightarrow{ن}$ = $\overrightarrow{ص}$ — ٤ $\overrightarrow{س}$　⑧ $\overrightarrow{و}$ = (—٢ $\overrightarrow{س}$ — ٥ $\overrightarrow{ص}$　⑨ $\overrightarrow{م}$ = —٣ $\overrightarrow{ص}$

[٢] أوجد المتجه $\overrightarrow{م}$ الذى تمثله القطعة المستقيم الموجهة $\overrightarrow{أ ب}$ ثم ارسم متجه الموضع الممثل للمتجه $\overrightarrow{م}$

① $\overrightarrow{أ}$ (١ ، ٣) ، $\overrightarrow{ب}$ (٢ ، —١)　② $\overrightarrow{أ}$ (—٢ ، —١) ، $\overrightarrow{ب}$ (٤ ، —٣)

③ $\overrightarrow{أ}$ (١ ، —٣) ، $\overrightarrow{ب}$ (—١ ، —١)　④ $\overrightarrow{أ}$ (—٧ ، ٥) ، $\overrightarrow{ب}$ (٢ ، —٥)

⑤ $\overrightarrow{أ}$ (٠ ، ٠) ، $\overrightarrow{ب}$ (—٨ ، —٢)　⑥ $\overrightarrow{أ}$ (١ ، ٤) ، $\overrightarrow{ب}$ (٧ ، ٦)

[٣] ارسم متجه الموضع الممثل لمتجه $\overrightarrow{أ}$ ثم ارسم قطعة مستقيمة موجهة ممثلة للمتجه $\overrightarrow{أ}$ نقطة بدايته ب وأوجد إحداثيا نقطة نهايتها .

① $\overrightarrow{أ}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، —١)

② $\overrightarrow{أ}$ = (—٢ ، —٤) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٤ ، —٣)

③ $\overrightarrow{أ}$ = (٨ ، —١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ٤)

④ $\overrightarrow{أ}$ = ٤ $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، —٢)

[٤] ارسم متجه الموضع الممثل للمتجه $\overrightarrow{أ}$ ثم ارسم قطعة مستقيمة موجهة للمتجه $\overrightarrow{أ}$ نهايته النقطة ب وأوجد نقطة بدايتها .

① $\overrightarrow{أ}$ = ٤ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = (٤ ، —٢)

② $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، —٣) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٠ ، —٣)

③ $\overrightarrow{أ}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ — ٥ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، —٣)

④ $\overrightarrow{أ}$ = (—٤ ، —١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ٠)

[٥] إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٦ ، ٢) فارسم قطعة مستقيمة موجهة تمثل : $\overrightarrow{أ}$ ، ٢$\overrightarrow{أ}$ ، $\frac{١}{٢}\overrightarrow{أ}$ ، − $\overrightarrow{أ}$ والتى نقطة بدايته النقطة ب (٢ ، − ١)

[٦] أنشئ نظاما إحداثيا وعين علي النقط أ (٢ ، ٣) ، ب (٣ ، ٥) ، جـ (٤ ، − ٢) ارسم قطعة مستقيمة موجهة $\overrightarrow{جـ ء}$ تكافئ $\overrightarrow{أ ب}$ وأوجد إحداثيا نقطة ء .

[٧] أنشئ نظاما إحداثيا وعين عليه النقط أ (− ١ ، ٥) ، ب (− ٢ ، − ١) ، جـ (− ٧ ، − ٤) ارسم قطعة مستقيمة موجهة $\overrightarrow{جـ ء}$ تكافئ $\overrightarrow{أ ب}$ وأوجد إحداثيا نقطة ء .

[٨] إذا كانت : أ (− ١ ، ١) ، ب (٢ ، − ٢) ، جـ (٥ ، ٤) ، ء (− ١ ، ٧) وكانت $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{ن}$ ، $\overrightarrow{هـ}$ ممثلة بالقطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أ ب}$ ، $\overrightarrow{جـ ء}$ ، $\overrightarrow{ب ء}$ على الترتيب فأوجد $\overrightarrow{م}$ − $\overrightarrow{ن}$ + $\overrightarrow{هـ}$

[٩] فى مستوى إحداثى متعامد عين النقط أ (٢ ، ٣) ، ب (− ٢ ، ٦) ، جـ (٥ ، − ٣) ، ء (٢ ، ٥) ثم ارسم $\overrightarrow{جـ هـ}$ ، $\overrightarrow{ء ل}$ ، $\overrightarrow{و س}$ كل منها تكافئ $\overrightarrow{أ ب}$ ، وأوجد إحداثيي كل من هـ ، ل ، س

باستخدام الانتقال : عين إحداثيي النقطة س التى تجعل $\overrightarrow{و س}$ تكافئ $\overrightarrow{أ ب}$

[١٠] أ ب جـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى نقطة م

أولا : اذكر القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) والتى تكافئ :

(١) $\overrightarrow{أ ب}$ (٢) $\overrightarrow{جـ ء}$ (٣) $\overrightarrow{ب جـ}$ (٤) $\overrightarrow{أ م}$ (٥) $\overrightarrow{م ء}$

ثانيا : بين لماذا تكون القطع المستقيمة الموجهة التالية غير متكافئة :

(١) $\overrightarrow{أ م}$ ، $\overrightarrow{أ جـ}$ (٢) $\overrightarrow{ب أ}$ ، $\overrightarrow{ء جـ}$ (٣) $\overrightarrow{ب م}$ ، $\overrightarrow{ء م}$

✍ [١١] في المستوى الإحداثي المتعامد إذا كانت أ (٢ ، −١) ، ب (٥ ، ٠) ،
جـ (−١ ، −٣) فأوجد متجه الموضع لكل منها بالنسبة لنقطة الأصل و ، وارسم القطعة المستقيمة الموجهة الممثلة له في المستوى الإحداثي .

✍ [١٢] أوجد المتجه $\overrightarrow{و أ}$ في الصورة القطبية إذا كان : $\overrightarrow{و أ}$

① (٢ ، −٢) ② (√٧ ، −√١٤) (−٣√٣ ، ٣)

(٨√٣ ، ٨) (٨√٣ ، ٨)

✍ [١٣] إذا كان : $\overrightarrow{و جـ}$ متجه موضع لنقطة جـ بالنسبة لنقطة الأصل و ، فأوجد إحداثيي نقطة جـ

① (٤ ، $\frac{\pi}{٣}$) ② (٦√٢ ، $\frac{\pi}{٤}$) ③ (١٤ ، $\frac{٥\pi}{٣}$)

④ (٥ ، $\frac{٤\pi}{٣}$) ⑤ (٢ ، $\frac{\pi}{٢}$) ⑥ (٩ ، $\frac{٣\pi}{٢}$)

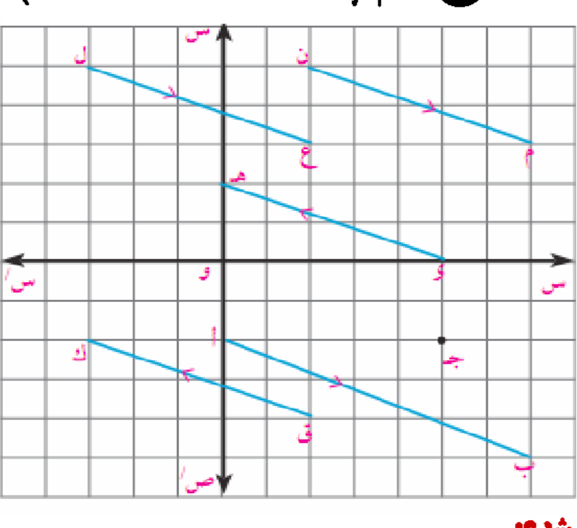
✍ [١٤] في مستوى إحداثي متعامد . أوجد الصورة القطبية لمتجه الموضع للنقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل و . إذا كانت :

❶ أ (−٢ ، −٢√٣) ❷ أ (−٢ ، −٢√٣) ❸ أ (−٢ ، −٢√٣)

✍ [١٥] في الشكل المقابل :

❶ عين متجه موضع نقطة جـ بالنسبة الى نقطة الأصل و ، ثم أوجد معيارة

❷ حدد جميع عناصر مجموعة المتجهات التى تكافئ كل منها $\overrightarrow{و جـ}$ ؟



تمارين (٢) على العمليات على المتجهات

[١] أكمل ما يأتى بالاجابة الصحيحة :

١ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٤ ، — ٢) ، $\overrightarrow{أب}$ = (٣ ، ٥) فإن : $\overrightarrow{ب}$ = ...

٢ إذا كان : $\overrightarrow{م}$ = (٤ ، — ٦) ، $\overrightarrow{ن}$ = (أ ، ٣) ، $\overrightarrow{م}$ // $\overrightarrow{ن}$ فإن أ = ...

٣ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، — ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ك) ، $\overrightarrow{أ}$ ⊥ $\overrightarrow{ب}$ فإن ك = ...

٤ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، ٤) ، $\overrightarrow{ب}$ = (— ٤ ، ٢) فإن ‖ $\overrightarrow{أ}$ — $\overrightarrow{ب}$ ‖ = ...

٥ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (ك ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، م) ، $\overrightarrow{أ}$ = ٢ $\overrightarrow{ب}$ فإن ك = ... ، م = ...

٦ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، — ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (— ١ ، ١) ، $\overrightarrow{جـ}$ = $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ فإن $\overrightarrow{جـ}$ = ...

٧ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، — ٣) ، $\overrightarrow{ب}$ (٣ ، ١) ، $\overrightarrow{جـ}$ = $\frac{١}{٢}$ (٢ $\overrightarrow{أ}$ — $\overrightarrow{ب}$) فإن $\overrightarrow{جـ}$ = ...

٨ تتكافأ القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كان .... ، ....

٩ متجه الموضع لنقطة معلومة هو ....

١٠ إذا كان : ٢ (٣ ، ب) + ٣ (أ — ٢) = (٣ ، ٢) فإن : أ = ... ، ب = ...

١١ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ (٥ ، ٧) ، $\overrightarrow{ب}$ (٠ ، ٥) فإن : ‖ $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ ‖ = ...

١٣ إذا كان : المتجهان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متساويان حيث $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، م) ، $\overrightarrow{ب}$ (ك ، ٥) فإن : ك — م = ...

١٤ إذا كان : المتجهان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان حيث $\overrightarrow{أ}$ (٤ ، ٥) ، $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، م) فإن م= ......

١٥ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = $\frac{٢}{٥}$ $\overrightarrow{ب}$ وعندما $\overrightarrow{أ}$ = ($\frac{٢}{٥}$ ، ٥) فإن $\overrightarrow{ب}$ = ...

١٦ إذا كان : أ (٢ ، ٠) + ب (٠ ، ٣) = (— ٤ ، ٦) فإن أ — ب = ...

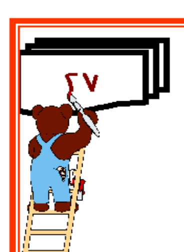
١٧ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ (٤ ، ٠) ، $\overrightarrow{ب}$ (٠ ، ٣) فإن : ‖ $\overrightarrow{أب}$ ‖ = ...

١٨ إذا كان : ٢ $\overrightarrow{جـ}$ + ٣ $\overrightarrow{د}$ = (٤ ، ٤) وكان $\overrightarrow{د}$ ($\frac{٤}{٣}$ ، ١) فإن $\overrightarrow{جـ}$ = ...

١٩ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ ، ك // ح — { ٠ } وكانت ك $\overrightarrow{ب}$ = ($\frac{٥}{٢}$ ، ١) ، $\overrightarrow{أ}$ ($\frac{١٠}{٣}$ ، $\frac{٤}{٣}$) فإن : ك= .....

٢٠ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٥ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = ($\frac{١}{٢}$ ، ١) فإن $\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{أ}$ + ٣ $\overrightarrow{ب}$ = ...

٢١ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{ب}$ والمتجه $\overrightarrow{أ}$ = ٣ ($\frac{١}{٢}$ ، ٠) ، $\overrightarrow{ب}$ (س ، ص) فإن س — ص = ...



[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ (٢ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ (٥ ، −٢) فإن : || $\overrightarrow{أ ب}$ || = ...

① $\sqrt{٥}$ ② $\sqrt{٧}$ ③ ٥   ④ ٢٥

٢ إذا كان : $\overrightarrow{أ ب}$ = (٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{أ}$ = (−٥ ، ١) فإن $\overrightarrow{ب}$ يساوى ....

① (٨ ، ٣)   ② (٣ ، ٨)   ③ (٥ ، −١)   ④ (−٢ ، ٣)

٣ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ك $\overrightarrow{ب}$ حيث $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ غير صفريين ، ك ∉ { ٠ ، ١ } فإن ....

① $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{ب}$ ② $\overrightarrow{ب}$ ⊥ $\overrightarrow{أ}$ ③ $\overrightarrow{أ}$ لايوازى $\overrightarrow{ب}$ ④ $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$

٤ إذا كان : أ = (أ$_{١}$ ، ب$_{١}$) ، $\overrightarrow{ب}$ = (أ$_{٢}$ ، ب$_{٢}$) ، $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ فإن : ....

① أ$_{١}$ ب$_{٢}$ − أ$_{٢}$ ب$_{١}$ = صفر   ② أ$_{١}$ أ$_{٢}$ − ب$_{١}$ ب$_{٢}$ = صفر

③ أ$_{١}$ أ$_{٢}$ + ب$_{١}$ ب$_{٢}$ = صفر   ④ أ$_{١}$ ب$_{٢}$ + أ$_{٢}$ ب$_{١}$ = صفر

٥ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ، $\overrightarrow{ب}$ = (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) ، $\overrightarrow{أ}$ ⊥ $\overrightarrow{ب}$ فإن : ....

① س$_{١}$ س$_{٢}$ + ص$_{١}$ ص$_{٢}$ = صفر   ② س$_{١}$ س$_{٢}$ − ص$_{١}$ ص$_{٢}$ = صفر

③ س$_{١}$ ص$_{٢}$ − س$_{٢}$ ص$_{١}$ = صفر   ④ س$_{١}$ ص$_{٢}$ + س$_{٢}$ ص$_{١}$ = صفر

٦ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ (س ، ٤) ، $\overrightarrow{ب}$ (٢ ، ص) ، $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ فإن : ....

① س + ٢ ص = ٠   ② س = ٢ ص   ③ س ص = ٨   ④ س = ٢ ص

٧ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ (س ، −١) ، $\overrightarrow{ب}$ (٣ ، ص) ، $\overrightarrow{أ}$ ⊥ $\overrightarrow{ب}$ فإن : ....

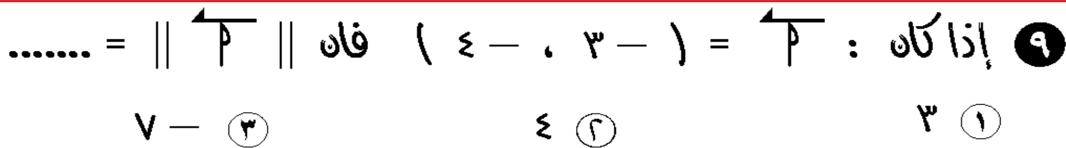
① ص = ٣ س   ② ص = − س   ③ س ص = −٣   ④ س ص = ٣

٨ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = −٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ فإن : || $\overrightarrow{أ}$ || = ...

① ٧   ② ٢٥   ③ $\sqrt{٧}$ ④ ٥

٨ إذا كان : || م(٣ ، ٤) || = ١ فإن م = ...

① $\frac{١}{٧}$ ② $\frac{١}{٢٥}$ ③ ± $\frac{١}{٥}$ ④ ± ٥



٩ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (−٣ ، −٤) فإن || $\overrightarrow{أ}$ || = ...

① ٣ ② ٤ ③ −٧ ④ ٥

١٠ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٤ ، ٥) ، $\overrightarrow{ب}$ = (−٢٠ ، ١٦) فإن المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ....

① متعامدان ② متوازيان ③ متكافئان ④ خلاف ذلك

١١ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ٥) ، $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، م) متعامدان فإن م تساوى ....

① −٥ ② −٣ ③ $\frac{-٣}{٥}$ ④ $\frac{-٥}{٣}$

١٢ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، −٣) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، ١ − س) فإن س تساوى ....

① ٤ ② $\frac{١١}{٢}$ ③ −١ ④ −٩

١٣ إذا كان : $\overrightarrow{أ ب}$ // $\overrightarrow{جـ ء}$ ، $\overrightarrow{أ ب}$ = (٥ ، ٦) فإن : $\overrightarrow{ء}$ − $\overrightarrow{جـ}$ يمكن أن تساوى ....

① (٥ ، ٦) ② (−٦ ، ٥) ③ (−٥ ، −٦) ④ (−٦ ، −٥)

١٤ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٤ ، −٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (−٢ ، ٠) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (١ ، م)
وكان $\overrightarrow{أ ب}$ ⊥ $\overrightarrow{جـ ب}$ فإن م تساوى ....

① ٢ ② ١ ③ −٢ ④ −١

١٥ إذا كان : || $\overrightarrow{أ ب}$ || = ٥ ، و ب = ٣ فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أ ب}$ هى ....

① $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{٣} = ١$ ② $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٥} = ١$

③ س − ٤ = ص − ٣ ④ ٤ ص = ٣ س

١٦ إذا كان : ل : ٣ س + ٨ ص − ٢٤ = ٠
فإن مساحة المثلث الذى يصنعه هذا المستقيم مع محورى الإحداثيات يساوى ....

① ٣ وحدات مساحة ② ٨ وحدات مساحة
③ ١٢ وحدات مساحة ④ ٢٤ وحدات مساحة

[٣] ضع (✓) أمام العبارة الصحيحة أو (✗) أمام العبارة الخطأ مع بيان السبب :

١ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، −٤) ، $\overrightarrow{ب}$ = −٤ $\overrightarrow{س}$ − ٣ $\overrightarrow{ص}$ فان : $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$

٢ إذا كان : أ ب جـ ء مستطيل قطراه $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ب ء}$ فان : $\overrightarrow{أ جـ}$ يكافئ $\overrightarrow{ب ء}$

٣ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، −١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، ٣) فان : $\| \overrightarrow{أ ب} \|$ = $\sqrt{٢٠}$

٤ إذا كان : $\overrightarrow{س ص}$ = (٢ ، ٣) ، س = (١ ، ٢) فان : ص = (١ ، ١)

[٤] إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، −٦) ، $\overrightarrow{ب}$ = (−٢ ، ٥) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (−٦ ، ١٤)

١ أوجد ٢ $\overrightarrow{أ}$ ، − $\overrightarrow{ب}$ ، $\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{جـ}$ ، $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{جـ}$

٢ عبر عن $\overrightarrow{جـ}$ بدلالة $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

[٥] عبر عن كل المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين :

١ $\overrightarrow{م}$ = (−٣ ، ٤)   ٢ $\overrightarrow{ن}$ = (٥ ، −١٢)

٣ $\overrightarrow{ل}$ = (−٣ ، −٦)   ٤ $\overrightarrow{ع}$ = (−٧ ، ٠)

[٦] إذا كانت $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، ١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ − ك ، ٤) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (ك − ٣ ، −٥)

فأوجد العدد ك إذا كان : ١ $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان   ٢ $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ متعامدان

[٧] إذا كانت $\overrightarrow{أ}$ = ك $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = ٤ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$

فأوجد العدد ك إذا كان : ١ $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان   ٢ $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان

[٨] أوجد العدد ك (ان أمكن) بحيث تحقق الشروط المعطاة :

١ $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، ك) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، −١) متعامدان .

٢ $\overrightarrow{أ}$ = (ك ، −٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = ك $\overrightarrow{س}$ + ٨ $\overrightarrow{ص}$ متعامدان

٣ $\overrightarrow{أ}$ = (−ك ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، ك) متوازيان

٤ $\overrightarrow{أ}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ ، ب = ك $\overrightarrow{ص}$ متوازيان

[٩] إذا كانت : ٢ $\overrightarrow{\text{م}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{جب}}$ − $\overrightarrow{\text{بأ}}$ **اثبت أن** : $\overrightarrow{\text{م}}$ = $\overrightarrow{\text{جأ}}$

[١٠] **في مستوى إحداثي متعامد** : أ (٣ ، −٤) ، ب (−١٢ ، ٥) ، ج (−٢ ، −٦) ، **أوجد متجه الموضع لكل النقط** أ ، ب ، ج **بالنسبة لنقطة الأصل** و (٠ ، ٠) ، **ثم أوجد معيار كل منها** .

[١١] **عبر عن كل من المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين ، ثم أوجد معيار كل منهما :**

① $\overrightarrow{\text{م}}$ = (−٤ ، −٣) ② $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (٨ ، −٦) ③ $\overrightarrow{\text{ق}}$ (−٥ ، −١٢)

④ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٠ ، ٢√٢) ⑤ $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (−٣√٣ ، ٠) ⑥ $\overrightarrow{\text{ج}}$ = (√٢ ، −٣√٢)

[١٢] **أوجد الصورة القطبية لكل من المتجهات التالية :**

(١) $\overrightarrow{\text{م}}$ = ٨√٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٨ $\overrightarrow{\text{ص}}$ (٢) $\overrightarrow{\text{ن}}$ = ٣√٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣√٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$

[١٣] **إذا كان** : $\overrightarrow{\text{أ}}$ (٣ ، −٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ (−٢ ، ٥) ، $\overrightarrow{\text{ج}}$ (٠ ، ١١)

اكتب كلا من المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين

٢ $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، ٣ $\overrightarrow{\text{ج}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ − $\overrightarrow{\text{ج}}$ ، ½ ($\overrightarrow{\text{ب}}$ + $\overrightarrow{\text{ج}}$) **عبر عن** $\overrightarrow{\text{ج}}$ **بدلالة** $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

[١٤] **إذا كان** : $\overrightarrow{\text{م}}$ (٥ ، ١) ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ (٤ ، −٢٠) ، $\overrightarrow{\text{ل}}$ (−١٠ ، −٢)

اثبت أن : ① $\overrightarrow{\text{م}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{ن}}$ ② $\overrightarrow{\text{م}}$ // $\overrightarrow{\text{ل}}$ ③ $\overrightarrow{\text{ن}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{ل}}$

[١٥] **إذا كان** : $\overrightarrow{\text{م}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ = −٦ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٨ $\overrightarrow{\text{ص}}$

$\overrightarrow{\text{ل}}$ = أ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٨ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ب $\overrightarrow{\text{ص}}$

① **اثبت أن** : $\overrightarrow{\text{م}}$ // $\overrightarrow{\text{ن}}$ ② **أوجد** : ب $\in$ ح **إذا كان** $\overrightarrow{\text{م}}$ // $\overrightarrow{\text{ل}}$

③ **أوجد** ب $\in$ ح **إذا كان** : $\overrightarrow{\text{ق}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{ن}}$ ④ **هل** $\overrightarrow{\text{ق}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{م}}$ ؟ **فسر إجابتك**

[١٦] إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = − $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٤ $\overrightarrow{\text{ص}}$

أوجد : ❶ $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ ❷ $\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ ❸ || $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ ||

❹ ٢ $\overrightarrow{\text{أ}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ب}}$ ❺ $\overrightarrow{\text{أ}}$ − ٣ $\overrightarrow{\text{ب}}$ ❻ − ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$

[١٧] أ ب جـ ء شبه منحرف فيه أ (−٢ ، −٣) ، ب (٤ ، −١)
، جـ (٢ ، ٥) ، ء (−١ ، ك)

❶ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}}$ // $\overrightarrow{\text{ءجـ}}$ أوجد قيمة ك .

❷ اثبت أن : $\overrightarrow{\text{جـب}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ❸ أوجد مساحة شبه المنحرف أ ب جـ ء .

[١٨] أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : أ (−١ ، −٢) ، ب (٩ ، ٠) ، جـ (٨ ، ٤)
، ء (٠ ، ٢) اثبت أن : ❶ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{ءجـ}}$ ❷ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ⊥ $\overline{\text{بجـ}}$

[١٩] أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، أ (٣ ، ٠) ، ب (٠ ، ٤) ، ء (−٢ ، −١)

أوجد إحداثيا نقطة جـ .

[٢٠] إذا كان : أ = (٧ ، −٦) ، ب = (−٣ ، ٤) ، جـ = (−٥ ، ٣)
، ء (٠ ، ٨) اثبت أن : $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{بء}}$ متعامدان واحسب معيار كل من نهما

[٢١] إذا كان : $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (١ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = (٢ ، ٣) ، $\overrightarrow{\text{م}}$ = (٢ ، $\frac{٥}{٤}$)

أوجد $\overrightarrow{\text{ص}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{ن}}$ + $\overrightarrow{\text{هـ}}$ − ٤ $\overrightarrow{\text{م}}$ واحسب || $\overrightarrow{\text{ص}}$ ||

[٢٢] أوجد المتجه $\overrightarrow{\text{م}}$ حيث $\overrightarrow{\text{م}}$ = $\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ + $\frac{٣}{٢}$ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ثم عين || $\overrightarrow{\text{م}}$ ||

[٢٣] إذا كان : $\overrightarrow{\text{م}}$ = $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ = − ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + $\overrightarrow{\text{ص}}$
، $\overrightarrow{\text{ل}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ أوجد قيمة ك بحيث تحقق || ك ($\overrightarrow{\text{م}}$ + $\overrightarrow{\text{ن}}$ + $\overrightarrow{\text{ل}}$) || = ٢٠

[٢٤] أ ب جـ مثلث رؤوسه أ (٢ ، –٢) ، ب (٨ ، ٤) ، جـ (٥ ، ٧) .

❶ اثبت أن △ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب

❷ أوجد مركز الدائرة المارة برؤوسه △ أ ب جـ

[٢٥] أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه أ (س ، ٢) ، ب = (٣ ، ٨) ، جـ (٩ ، ١) ، ء (٧ ، ص) أوجد قيمة س ، ص ثم أوجد ‖ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ‖ ، ‖ $\overrightarrow{\text{أء}}$ ‖

[٢٦] إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (١ ، ٧) ، $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = (–٤ ، ٢) ، و $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ = (–٤ ، –٦)
فأوجد إحداثى كل من النقط أ ، ب ، جـ حيث و نقطة الأصل .

[٢٧] س ص ع ل شكل رباعى فيه $\overrightarrow{\text{س ص}}$ (٢ ، ٣) ، $\overrightarrow{\text{ص ع}}$ = (٤ ، –٢) ، $\overrightarrow{\text{ع ل}}$ = (٣ ، ٤) ، عين المتجه $\overrightarrow{\text{س ل}}$. إذا كان ل = (٤ ، –٢)
فأوجد النقط س ، ص ، ع

[٢٨] إذا كان : أ (س ، –٢) ، ب (٤ ، ١) ، جـ (٣ ، ص) ، ء (–١ ، ٥)
أوجد قيمة كل من س ، ص إذا كان :

❶ المتجهان $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـء}}$ متساويان مقدارا متحدان اتجاها .

❷ المتجهان $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـء}}$ متساويان مقدارا متضادان اتجاها .

[٢٩] إذا كان : أ (٧ ، ٤) ، ب (٣ ، ٨) ، جـ (–٣ ، ٠)
أوجد نقطة ء بحيث يكون أ ب جـ ء متوازى أضلاع .

[٣٠] إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ (١٢ ، –٣) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ك (٤ ، ص) ، $\overrightarrow{\text{أ}}$ // $\overrightarrow{\text{ب}}$ أوجد كل من ك ، ص

[٣١] إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ($-2\sqrt{3}$ ، –٣) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ (٢ ، $\sqrt{3}$)
اذكر العلاقة بين المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ مع ذكر السبب ؟

[٣٢] إذا كان : أ ب = (٧ ، — ٤) ، أ = (— ٥ ، ٣) ، ء جـ = (— ٢١ ، ١٢) ، ء = (١٥ ، — ٩) عين ب ، جـ وعين عندئذ أى المتجهات تكون متوازية ؟

[٣٣] إذا كان : أ = (٧ ، — ٣) ، ب = (— ٢ ، ٥) ، جـ = ٢ س + ٣ ص

① اثبت أن : ل = ٢ جـ + ٣ ب — أ يوازى المتجه م = ٣ س — ٨ ص

② إذا كان : ل = ك م أوجد قيمة ك

[٣٤] إذا كان : ء (٢ ، ٤) ، هـ (٦ ، ٤) ، ى (٢ ، ٧) اثبت أن :

① ء هـ // محور السينات ② ء ى // محور الصادات ③ || ء هـ ||

④ إذا كان : و أ تكافئ ء هـ ، و ب تكافئ ء ى ، و جـ تكافئ هـ ء ، و ن تكافئ هـ ى حيث و نقطة الأصل . فأوجد إحداثيات كل من أ ، ب ، جـ ، ن

[٣٥] إذا كان : جـ = (٤ ، — ١) ، ء = (— ٣ ، ٢) ، هـ = (— ٥ ، ١)

فأوجد المتجه أ الذى يحقق المعادلة : ٢ أ = ٢ جـ — ٣ ء + ٢ هـ

[٣٦] إذا كان : م = (١ ، — ٣) ، ن = (٤ ، ١) ، ل = (٢ ، — ٣) فأوجد :

① م + ن ② ل — ن ③ ٢ م + ٣ ل ④ ٢ ن — ٣ ل

[٣٧] أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن :

① سرعة منتظمة مقدارها ٦٠ كم/س فى اتجاه الغرب .

② قوة مقدارها ٢٠ ث كجم تؤثر على جسم فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق .

③ إزاحة جسم مسافة ٤٠ سم فى اتجاه الشمال الغربى .

[٣٧] أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن كل من :

① إزاحة جسم مسافة ١٥٠ سم فى اتجاه الجنوب الشرق .

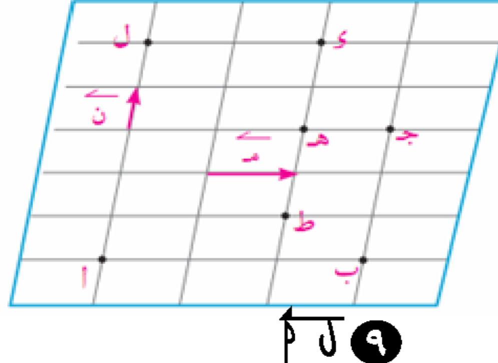
② قوة مقدارها ٩٠ ث كجم تؤثر على جسيم فى اتجاه ٦٠° غرب الجنوب .

[٣٨] أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن كل من :

❶ السرعة المنتظمة لسيارة تقطع ١٠٠ كم/س فى اتجاه ٦٠° شمال الشرق

❷ قوة مقدارها ١٢٠ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية فى اتجاه ٣٠° جنوب الغرب .

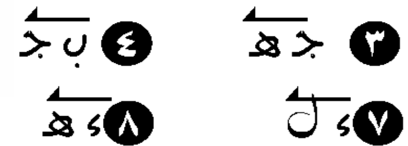
[٣٩] الشبكة المقابلة لمتوازيات أضلاع متطابقة :



أولا : عبر كل من القطع المستقيمة الموجهة التالية بدلالة المتجهين $\overleftarrow{م}$ ، $\overleftarrow{ن}$

❶ $\overleftarrow{أ ب}$ ❷ $\overleftarrow{جـ ب}$ ❸ $\overleftarrow{جـ هـ}$ ❹ $\overleftarrow{ب جـ}$

❺ $\overleftarrow{ب أ}$ ❻ $\overleftarrow{ط هـ}$ ❼ $\overleftarrow{ى ل}$ ❽ $\overleftarrow{ى هـ}$ ❾ $\overleftarrow{ل أ}$



ثانيا : استنتج أن : $\overleftarrow{أ ب} = - \overleftarrow{ب أ}$ وفسر ذلك هندسيا

[٤٢] ارسم $\overleftarrow{م} = (٢ ، \frac{\pi}{٤})$ فى مستوى إحداثى متعامد ، ثم مثل هندسيا

كلا من متجهات الموضع التالية بقطع مستقيمة موجهة فى نفس المستوى :

❶ $\overleftarrow{أ} = ٣ \overleftarrow{م}$ ❷ $\overleftarrow{ب} = - \overleftarrow{م}$ ❸ $\overleftarrow{جـ} = - ٢ \overleftarrow{م}$

[٤١] الشبكة البيانية المقابلة لمتوازيات الأضلاع متطابقة عبر عن كل من القطع

المستقيمة الموجهة التالية بدلالة المتجهين $\overleftarrow{م}$ ، $\overleftarrow{ن}$

❶ $\overleftarrow{أ ب}$ ❷ $\overleftarrow{ب ص}$ ❸ $\overleftarrow{هـ جـ}$ ❹ $\overleftarrow{ى هـ}$

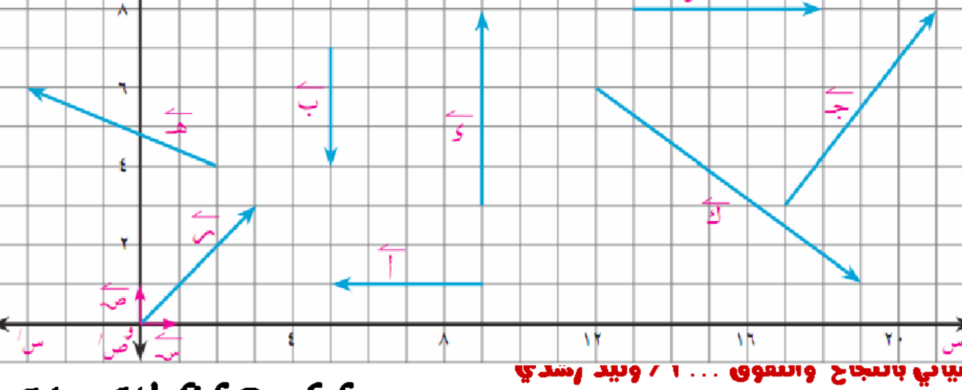


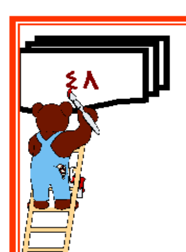
❺ $\overleftarrow{س هـ}$ ❻ $\overleftarrow{س ص}$ ❼ $\overleftarrow{ص م}$ ❽ $\overleftarrow{ل م}$



❾ $\overleftarrow{ب م}$ ❿ $\overleftarrow{هـ و}$ ⓫ $\overleftarrow{و ل}$ ⓬ $\overleftarrow{و ى}$

[٤٠] يبين الشكل التالى تمثيلا لبعض المتجهات فى المستوى الإحداثى المتعامد اكتب كل متجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.





تمارين (٣) على العمليات على المتجهات

[١] أكمل ما يأتى :

❶ فى المثلث أ ب جـ : $\overrightarrow{\text{أ جـ}} - \overrightarrow{\text{جـ ب}} = ...$

❷ فى المثلث أ ب جـ : $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} = ...$

❸ فى المثلث س ص ع : $\overrightarrow{\text{س ص}} + \overrightarrow{\text{ص ع}} + \overrightarrow{\text{س ع}} = ...$

❹ فى المثلث أ ب جـ : أ ب = أ جـ ، س منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ فان : $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ جـ}} = ...$

[٢] فى المثلث س ص ع أكمل ما يأتى :

(١) $\overrightarrow{\text{س ص}} + \overrightarrow{\text{ص ع}} = ...$ (٢) $\overrightarrow{\text{س ع}} + \overrightarrow{\text{ع ص}} = ...$

(٣) $\overrightarrow{\text{س ص}} - \overrightarrow{\text{س ع}} = ...$ (٤) $\overrightarrow{\text{ص س}} - \overrightarrow{\text{ص ع}} = ...$

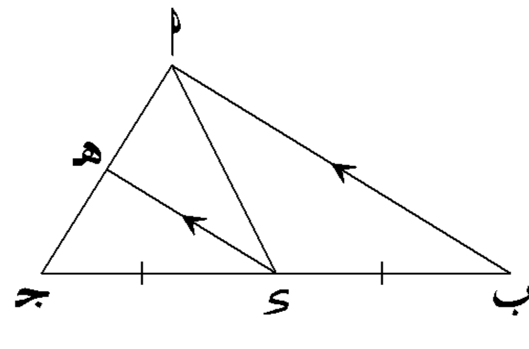
[٣] ق ن ل م متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى ك أكمل ما يأتى :

❶ $\overrightarrow{\text{ن ل}} + \overrightarrow{\text{ل م}} = ...$ ❷ $\overrightarrow{\text{ق ل}} = ٢ \times ....$

❸ $\overrightarrow{\text{ق ن}} + \overrightarrow{\text{ن ل}} = ٢ \times ....$ ❹ $\overrightarrow{\text{ق م}} + \overrightarrow{\text{م ل}} = ...$

❺ $\overrightarrow{\text{ل ن}} + \overrightarrow{\text{ن ق}} = ٢ \times ......$ ❻ $\overrightarrow{\text{ن ق}} + \overrightarrow{\text{ق م}} + \overrightarrow{\text{م ل}} + \overrightarrow{\text{ل ن}} = ...$

[٤] فى المثلث أ ب جـ : إذا كانت ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء هـ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب أ}}$ فان



(١) $\overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{جـ ء}} = ٢ \times ....$

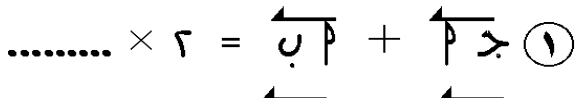
(٢) $\overrightarrow{\text{ء هـ}} - \overrightarrow{\text{جـ هـ}} = ...$

(٣) $\overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{ء ب}} = ...$

(٤) $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ جـ}} + \overrightarrow{\text{ء جـ}} = ... + \overrightarrow{\text{أ ء}}$

(٥) $\overrightarrow{\text{أ ب}} + ٢\overrightarrow{\text{ب ء}} + ٣\overrightarrow{\text{جـ هـ}} + \overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{ء هـ}} = ...$

[٥] في الشكل المقابل : أ ب جـ ء شبه منحرف ، $\overline{\text{بجـ}}$ // $\overline{\text{أء}}$ ، بجـ = ٢ أء فإن :



① $\overleftarrow{\text{جـأ}} + \overleftarrow{\text{أب}} = ٢ \times$ ....

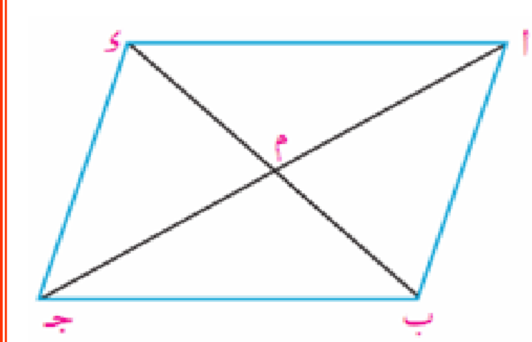
② $\overleftarrow{\text{بء}} + \overleftarrow{\text{أجـ}} = ٣ \times$ ....

③ $\overleftarrow{\text{جـء}} - \overleftarrow{\text{أب}} = \frac{٣}{٢} \times$ ....

④ $\overleftarrow{\text{بم}} + \overleftarrow{\text{مء}} + \overleftarrow{\text{جـم}} + \overleftarrow{\text{مأ}} = \overleftarrow{\text{بأ}} +$ ....

⑤ $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{بجـ}} - \overleftarrow{\text{ءجـ}} + \overleftarrow{\text{ءم}} - \overleftarrow{\text{أم}} =$ ....

[٦] في الشكل المقابل : أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، م نقطة تقاطع قطراه . أكمل :



❶ $\overleftarrow{\text{أب}} =$ ....

❷ $\overleftarrow{\text{بجـ}} =$ ....

❸ $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{بجـ}} =$ ....

❹ $\overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{جـء}} =$ ....

❺ $\overleftarrow{\text{بء}} + \overleftarrow{\text{ءجـ}} =$ ....

❻ $\overleftarrow{\text{جـأ}} + \overleftarrow{\text{أء}} =$ ....

❼ $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أء}} =$ ....

❽ $\overleftarrow{\text{بجـ}} + \overleftarrow{\text{ءجـ}} =$ ....

❾ $\overleftarrow{\text{ءأ}} + \overleftarrow{\text{ءجـ}} =$ ....

❿ $\overleftarrow{\text{أم}} + \overleftarrow{\text{مجـ}} =$ ....

⓫ $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أء}} = ٢ \times$ ....

⓬ $\overleftarrow{\text{أء}} + \overleftarrow{\text{جـء}} = ٢ \times$ ....

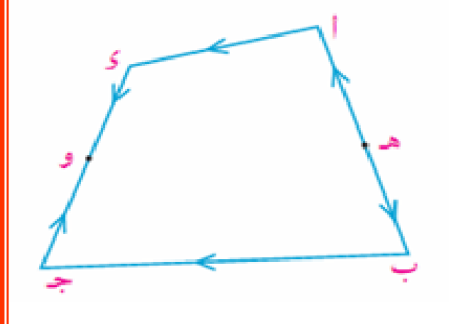
⓭ $\overleftarrow{\text{مأ}} + \overleftarrow{\text{مب}} =$ ....

⓮ $\overleftarrow{\text{أب}} + ٢\,\overleftarrow{\text{بم}} =$ ....

[٧] في أي مثلث س ص ع ، اثبت أن : $\overleftarrow{\text{سص}} + \overleftarrow{\text{صع}} + \overleftarrow{\text{عس}} = \overleftarrow{٠}$

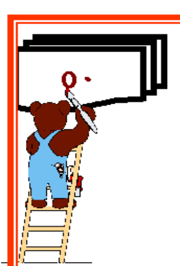
[٨] في أي شكل رباعي أ ب جـ ء اثبت أن : $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{بجـ}} + \overleftarrow{\text{جـء}} = \overleftarrow{\text{أء}}$.

[٩] في الشكل المقابل : أ ب جـ ء شكل رباعي



، هـ ∈ $\overline{\text{أب}}$ ، و ∈ $\overline{\text{جـء}}$.

اثبت أن : $\overleftarrow{\text{هـب}} + \overleftarrow{\text{بجـ}} + \overleftarrow{\text{جـو}} = \overleftarrow{\text{هـأ}} + \overleftarrow{\text{أء}} + \overleftarrow{\text{ءو}}$



✍ [١٠] أ ب جـ ء شكل رباعى إذا كان : $\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{ءب}} = ٢\,\overrightarrow{\text{أب}}$

اثبت أن : أ ب جـ ء متوازى أضلاع .

✍ [١١] أ ب جـ مثلث فيه ء منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{أجـ}}$

اثبت أن : $\overrightarrow{\text{أهـ}} + \overrightarrow{\text{جـء}} = \overrightarrow{\text{هـب}} + \overrightarrow{\text{ءأ}}$

✍ [١٢] أ ب جـ مثلث ء ، هـ ، و منتصفات الأضلاع $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{بجـ}}$ ، $\overline{\text{جـأ}}$ على الترتيب.

اثبت أن : $\overrightarrow{\text{أهـ}} + \overrightarrow{\text{بو}} = \overrightarrow{\text{ءجـ}}$

✍ [١٣] أ ب جـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{\text{أء}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ ، $\frac{\text{أء}}{\text{بجـ}} = \frac{٢}{٣}$

اثبت أن : $\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{بء}} = \frac{٥}{٢}\,\overrightarrow{\text{أء}}$

✍ [١٤] أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه هـ منتصف $\overline{\text{بجـ}}$

اثبت أن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ءجـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{أهـ}}$

✍ [١٥] أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{\text{بجـ}} \parallel \overline{\text{أء}}$ ، ٣ أء = ب جـ

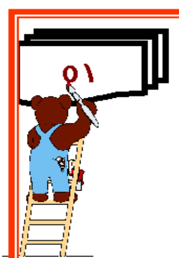
اثبت أن : $\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{بء}} = ٤\,\overrightarrow{\text{أء}}$

✍ [١٦] أ ب جـ ء متوازى أضلاع اثبت أن : $\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{بء}} = ٢\,\overrightarrow{\text{بجـ}}$

✍ [١٧] مثلث أ ب جـ ، ء منتصف $\overline{\text{بجـ}}$ ، اثبت أن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \text{ب}\,\overrightarrow{\text{أجـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{أء}}$

✍ [١٨] أ ب جـ مثلث ، ء $\in \overline{\text{بجـ}}$ بحيث ب ء : ء جـ = ٢ : ٣ .

اثبت أن : $٣\,\overrightarrow{\text{أجـ}} + ٢\,\overrightarrow{\text{أء}} = ٥\,\overrightarrow{\text{أء}}$



[١٩] أ ب جـ ء **شبه المنحرف فيه** $\overline{\text{بجـ}} \parallel \overline{\text{أء}}$ ، هـ **منتصف** $\overline{\text{أء}}$.

اثبت أن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} + \overrightarrow{\text{ءجـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{هـجـ}}$

[٢٠] أ ب جـ ء **شكل رباعى فيه** هـ $\in \overline{\text{بجـ}}$.

اثبت أن : $\overrightarrow{\text{أب}} - \overrightarrow{\text{هـب}} - \overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{ءهـ}}$

[٢١] أ ب جـ ء **شكل رباعى فيه** $٢\,\overrightarrow{\text{بجـ}} = ٥\,\overrightarrow{\text{أء}}$.

اثبت أن : $٢\,\overrightarrow{\text{أجـ}} + ٢\,\overrightarrow{\text{بء}} = ٧\,\overrightarrow{\text{أء}}$

[٢٢] أ ب جـ **مثلث** فيه ء ، هـ ، و **منتصفات القطع** $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{بجـ}}$ ، $\overline{\text{جـأ}}$ **على الترتيب.**

اثبت أن : $\overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{أو}} = \overrightarrow{\text{أهـ}}$

[٢٣] **فى أى شكل رباعى** أ ب جـ ء . **اثبت أن :** $\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{بء}} = \overrightarrow{\text{بجـ}} + \overrightarrow{\text{أء}}$

[٢٤] أ ب جـ ء **شبه منحرف فيه** س **منتصف** $\overline{\text{أب}}$ ، ص **منتصف** $\overline{\text{جـء}}$ **وكان :**

$\overrightarrow{\text{أء}} = ٢\,\overrightarrow{\text{بجـ}}$ ، $\overline{\text{بجـ}} \parallel \overline{\text{أء}}$ **فاثبت أن :** $\overrightarrow{\text{س ص}} = \frac{٣}{٢}\,\overrightarrow{\text{بجـ}}$

[٢٥] أ ب جـ ء **شبه منحرف فيه** $\overrightarrow{\text{بجـ}} = ٣\,\overrightarrow{\text{أء}}$ **اثبت أن :** $\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{بء}} = ٤\,\overrightarrow{\text{أء}}$

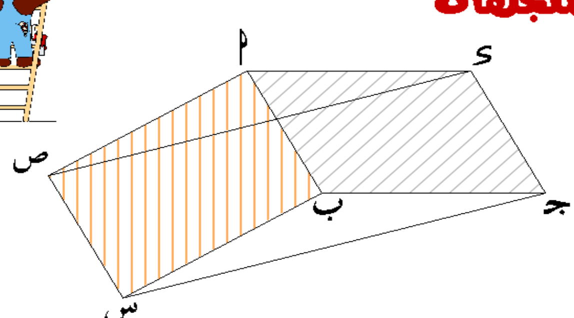
[٢٦] **إذا كان :** أ ب جـ ء **شكل رباعى فيه** $٢\,\overrightarrow{\text{بجـ}} = ٥\,\overrightarrow{\text{أء}}$.

اثبت أن : $\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{بء}} = \frac{٧}{٢}\,\overrightarrow{\text{أء}}$

[٢٦] **حاول أن تحل :** أ ب جـ ء **شكل رباعى فيه :** $\overrightarrow{\text{بجـ}} = ٣\,\overrightarrow{\text{أء}}$ **اثبت أن :**

① أ ب جـ ء **شبه منحرف**　　② $\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{بء}} = ٤\,\overrightarrow{\text{أء}}$

تمارين (٤) على تطبيقات على المتجهات



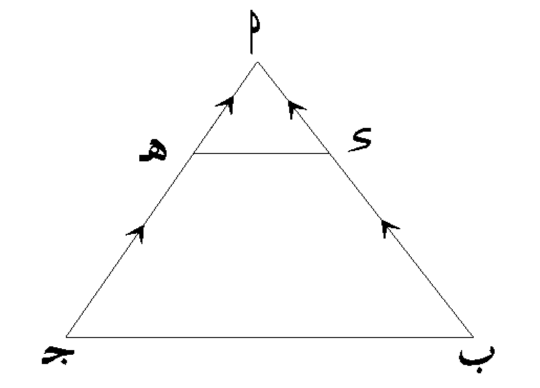
[١] فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء ، أ ب س ص متوازيا أضلاع . باستخدام المتجهات

اثبت أن : الشكل جـ س ص ء هو متوازى أضلاع .



[٢] فى الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث فيه ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$.

$\overleftarrow{\text{ء أ}}$ = $\overleftarrow{\text{م}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ أ}}$ = $\overleftarrow{\text{ن}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{م}}$ ،

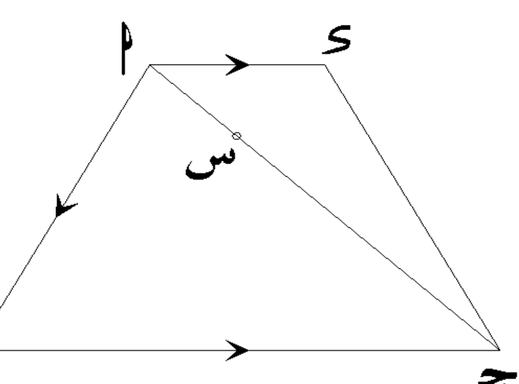
$\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{ن}}$ أوجد $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ بدلالة $\overleftarrow{\text{م}}$ ، $\overleftarrow{\text{ن}}$

ثم برهن أن : $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{ء هـ}}$



[٣] أ ب جـ ء شبه منحرف فيه ، $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ب جـ = ٣ ب ء

، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ = $\overleftarrow{\text{م}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = $\overleftarrow{\text{ن}}$



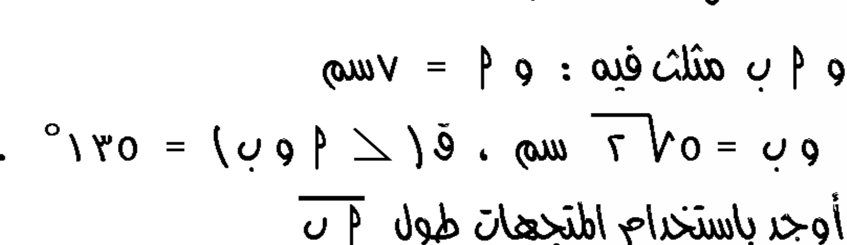
أولا : عبر بدلالة : $\overleftarrow{\text{م}}$ ، $\overleftarrow{\text{ن}}$ عن كل من :

$\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$

ثانيا : إذا كانت : س ∈ $\overleftarrow{\text{ء ب}}$ حيث ء س = $\frac{١}{٣}$ س ب

اثبت أن : النقط أ ، س ، جـ تقع على استقامة واحدة .

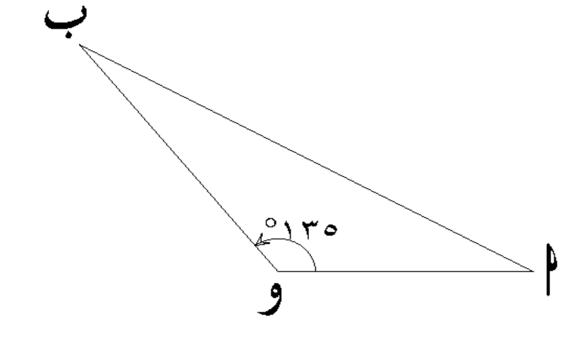
[٤] فى الشكل المقابل :



و أ ب مثلث فيه : و أ = ٧سم

، و ب = ٥$\sqrt{٢}$ سم ، ق(∠ أ و ب) = ١٣٥° .

أوجد باستخدام المتجهات طول $\overline{\text{أ ب}}$



[٥] إذا كانت : أ (٥ ، ١) ، ب (٢ ، ٥) ، جـ (−٢ ، ٣) ، د (−٥ ، −٤)

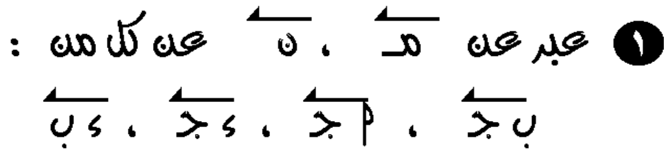
فأثبت أن باستخدام المتجهات : الشكل أ ب جـ د شبه منحرف .

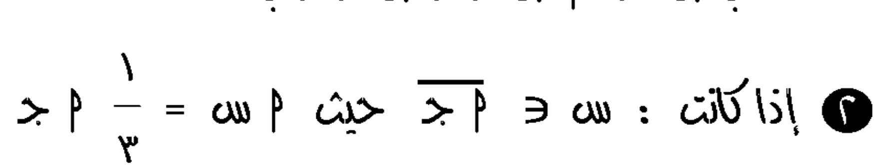
[٦] إذا كانت : أ (٦ ، ٥) ، ب (٨ ، −٣) ، جـ (−٢ ، −٥)

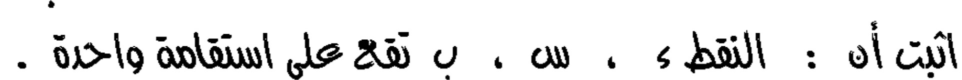
هى رؤوس المثلث أ ب جـ ، فأوجد باستخدام المتجهات إحداثيي نقطة تقاطع متوسطاته .

[٧] فى الشكل المقابل :

أ ب جـ د شبه منحرف ، $\overline{\text{أد}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ ، أ د = $\frac{1}{2}$ ب جـ ، $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ن}}$


١ عبر عن $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ عن كل من :
$\overrightarrow{\text{بجـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{دجـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{دب}}$


٢ إذا كانت : س $\in \overline{\text{أجـ}}$ حيث أ س = $\frac{1}{3}$ أ جـ


اثبت أن : النقط د ، س ، ب تقع على استقامة واحدة .

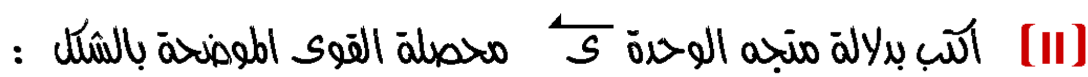
حاول أن تحل :

[٨] أ ب جـ د شكل رباعى . س ، ص ، ع ، ل منتصفات الأضلاع $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{بجـ}}$ ، $\overline{\text{جـد}}$ ، $\overline{\text{دأ}}$ على الترتيب باستخدام المتجهات :

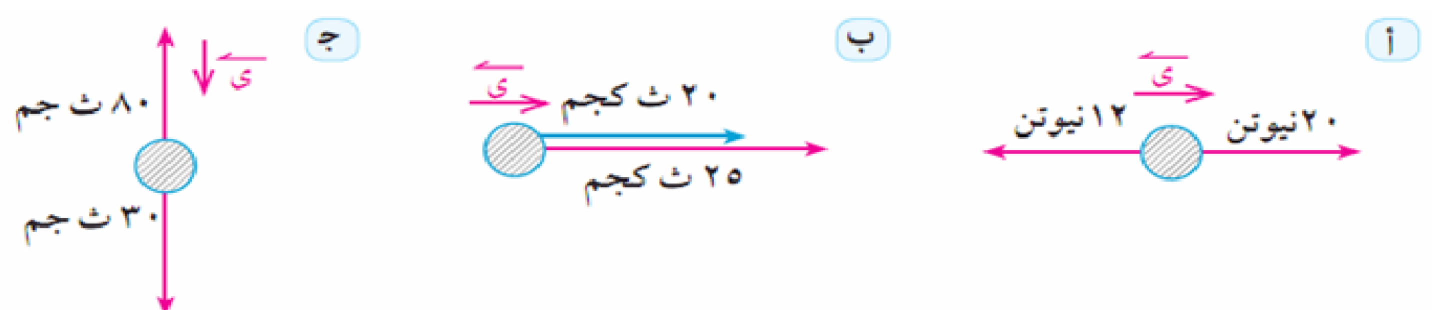
١ اثبت أن س ص ع ل متوازى أضلاع ٢ محيط الشكل أ ب جـ د يساوى مجموع طولى قطريه .

[٩] باستخدام المتجهات : اثبت أن : النقط أ (٣ ، ٤) ، ب (١ ، −١) ، جـ (−٤ ، −٣) ، د (٢ ، ٢) هى رؤوس معين .

[١٠] أ ب جـ ء مربع ، إذا كانت : أ (٨ ، ٢) ، ب (٣ ، –١) ، جـ (٠ ، ٤)
فأوجد باستخدام المتجهات إحداثيي نقطة ء ومساحة سطح المربع .



[١١] اكتب بدلالة متجه الوحدة $\overleftarrow{ى}$ محصلة القوى الموضحة بالشكل :



ثانيا : فى كل مما يأتى ، القوتان $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، تؤثران فى نقطة مادية ، وضح مقدار واتجاه محصلة كل قوتين منها .

① ق~١~ = ١٥ نيوتن فى اتجاه الشرق، ق~٢~ = = ٣٤ ث جم فى اتجاه الجنوب الغربى .

② ق~١~ = ٣٤ ث جم فى اتجاه الشمال الشرقى ، ق~٢~ = ٣٤ ث جم فى اتجاه الجنوب الغربى .

③ ق~١~ = ٥٠ داين تعمل فى اتجاه ٦٠° غرب الشمال ، ق~٢~ = ٥٠ داين تعمل فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق .

④ ق~١~ = ٣٠ نيوتن تعمل فى فى اتجاه ٢٠° شرق الشمال ، ق~٢~ = ٣٠ نيوتن تعمل فى اتجاه ٧٠° شمال الشرق .

ثالثا :

[١٢] القوى : $\overleftarrow{ق_1}$ = ٧ $\overleftarrow{س}$ – ٥ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = أ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$
، $\overleftarrow{ق_3}$ = –٤ $\overleftarrow{س}$ + (ب – ٣) $\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى نقطة مادية أوجد قيمتى أ ، ب إذا كانت :
① المحصلة مجموعة القوى ٤ $\overleftarrow{س}$ – ٧ $\overleftarrow{ص}$ ② مجموعة القوى متزنة .

[١٣] القوى : $\overleftarrow{ق_1}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = أ $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$
، $\overleftarrow{ق_3}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ + ب $\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى نقطة مادية . أوجد قيمتى أ ، ب
إذا كانت محصلة هذه القوى $\overleftarrow{ق}$: ❶ $\overleftarrow{ق}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ – ٢ $\overleftarrow{ص}$ ❷ $\overleftarrow{ق}$ = $\overleftarrow{صفر}$

[١٤] تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٩٠كم/س . إذا تحركت دراجة بخارية بسرعة ٤٠كم/س على نفس الطريق . فأوجد سرعة الدراجة البخارية بالنسبة للسيارة عندما يتحركان فى نفس الاتجاه .

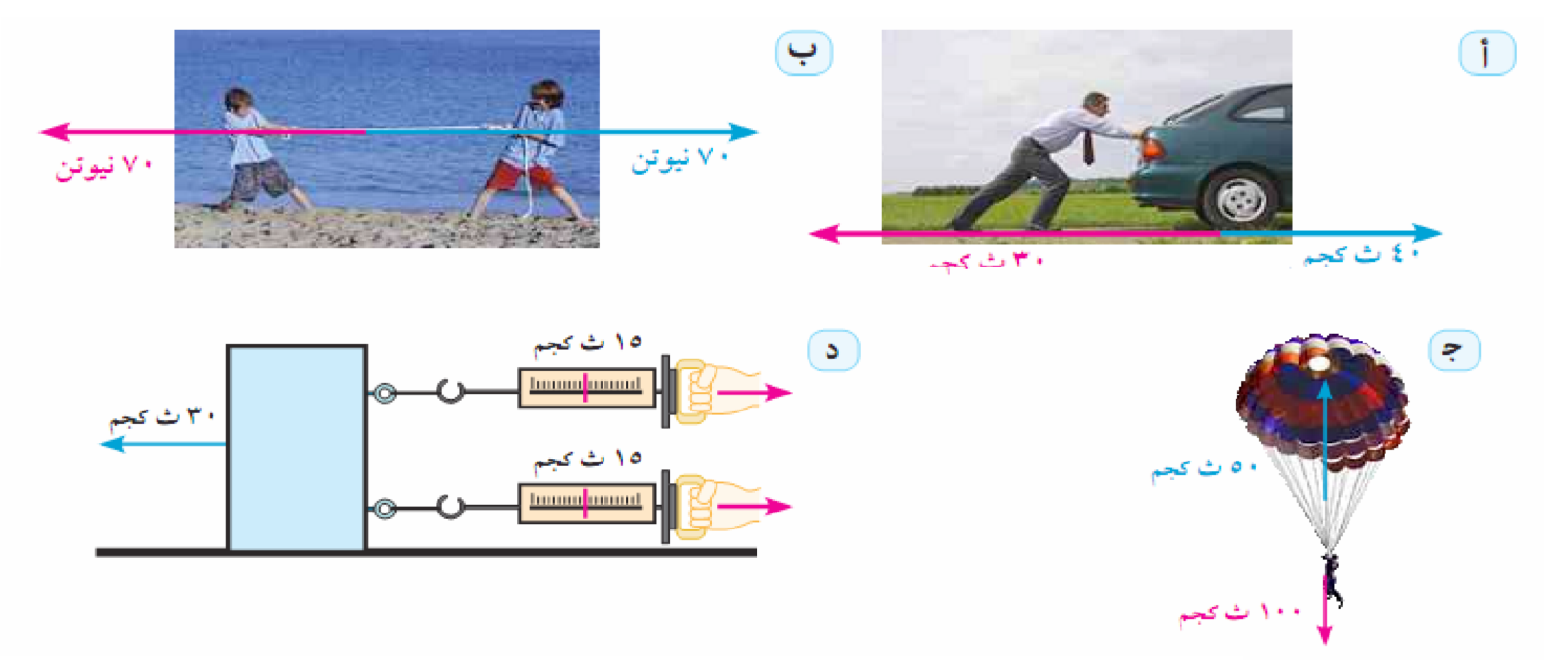
✷ [١٥] تتحرك سيارتين م ، ب على طريق مستقيم بالسرعتين ٦٠كم/س ، ٩٠ كم/س وفى اتجاه $\overleftarrow{ب م}$ أوجد

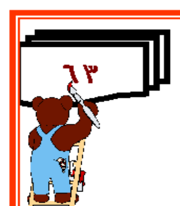
❶ سرعة ب بالنسبة إلى م   ❷ سرعة م بالنسبة لـ ب

✷ [١٦] تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٦٥كم/س فإذا تحركت على نفس الطريق دراجة بخارية بسرعة ٥٠كم/س أوجد سرعة الدراجة بالنسبة للسيارة فى كل من الحالتين الآتيتين ❶ الدراجة و السيارة تتحركان فى وجهة واحدة ❷ الدراجة تتحرك فى وجهة مضادة لوجهة السيارة [١٥كم/س ، ١١٥كم/س نحو السيارة]

[١٧] تتحرك سيارة لمراقبة السرعة على أحد الطرق الصحراوية بسرعة ٤٠ كم/س . راقبت سيارة شاحنة قادمة فى الاتجاه المضاد فبدت لها وكأنها متحركة بسرعة ١٣٥كم/س . فإذا كانت أقصى سرعة مسموح بها على هذا الطريق ١٠٠ كم/س . هل الشاحنة القادمة مخالفة للسرعة المقررة أم لا ؟ فسر إجابتك

[١٨] أوجد محصلة القوى المؤثرة $\overleftarrow{ق}$ فى كل مما يأتى :





تمارين عامة

[١] فى نظام إحداثى متعامد نقطة الأصل فيه و (٠ ، ٠) عين النقط أ (−٤ ، ٠) ، ب (٠ ، −٣) ، جـ (٣ ، ١) ، ء (٢ ، ٨) ثم أوجد :

① متجه الموضع بالنسبة لنقطة الأصل (و) لكل من النقط أ ، ب ، جـ بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.

② متجه الموضع للنقطة ء بالنسبة لنقطة الأصل (و) بالصورة القطبية .

③ معيار القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أب}$.　　④ قيمة ك التى تجعل $\overrightarrow{أء}$ = ك $\overrightarrow{بجـ}$.

[٢] أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن :

① قوة مقدارها ٢٠ نيوتن تؤثر على جسم ، وتعمل فى اتجاه الشمال .

② إزاحة جسم مسافة ٥٠ سم فى اتجاه ٣٠° شمال الغرب .

③ السرعة المنتظمة لسيارة تقطع مسافة ٧٠كم/س فى اتجاه الغرب .

[٣] إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٤ ، −٦) ، $\overrightarrow{ب}$ = (−٦ ، ٩) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (−٣ ، −٢)

① اثبت أن : $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ⊥ $\overrightarrow{جـ}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ ⊥ $\overrightarrow{أ}$

② أوجد : ٢ $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ب}$ − ٢ $\overrightarrow{جـ}$ ، $\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ − ٣ $\overrightarrow{جـ}$

[٤] فى المثلث أ ب جـ ، ء ∈ $\overline{بجـ}$ ، حيث ب ء : ء جـ = ٣ : ٢

اثبت أن : ٢ $\overrightarrow{أب}$ + ٣ $\overrightarrow{أجـ}$ = ٥ $\overrightarrow{أء}$

[٥] إذا كان : أ ب جـ ء متوازى أضلاع حيث أ (٢ ، −٢) ، ب (٤ ، −٢) ، جـ (٢ ، ٣) أوجد إحداثى نقطة ء .

[٦] فى مستوى إحداثى متعامد ، $\overrightarrow{أب}$ = (−٢ ، ٣) ، $\overrightarrow{جـب}$ = (−٦ ، −٤) ، ٢ $\overrightarrow{ب}$ + $\overrightarrow{أجـ}$ = (٦ ، ١١) أوجد ① إحداثيى كل من النقط أ ، ب ، جـ

② مساحة سطح المثلث أ ب جـ (باستخدام المتجهات)

اختبار الوحدة

[١] فى مستوى إحداثى متعامد ، نقطة الأصل و (٠ ، ٠) إذا كانت : أ (١ ، − ٤) ، ب (٤ ، ٠) ، جـ (− ٢ ، ١) ، ء (١ ، ٥)

① أوجد $\|\overrightarrow{\text{أ ب}}\|$ ، $\|\overrightarrow{\text{جـ ء}}\|$ ② اثبت أن : $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ تكافئ $\overrightarrow{\text{جـ ء}}$

③ إذا كانت $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ تكافئ $\overrightarrow{\text{هـ ء}}$ أوجد إحداثيى هـ .

[٢] إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٤ ، ١) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (− ١ ، ٦) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (١ ، ١٢)

① أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين كلا من : $\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{جـ}}$ ، $\frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}})$

② عبر عن المتجه جـ بدلالة المتجهين $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ}}$.

[٣] إذا كانت $\overrightarrow{\text{م}} = \overrightarrow{\text{س}} + ٢\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}} = -٥\overrightarrow{\text{س}} - ١٠\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ل}} = \text{أ}\overrightarrow{\text{س}} + ١٠\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{و}} = ٢\overrightarrow{\text{س}} + \text{ب}\overrightarrow{\text{ص}}$

① اثبت أن : $\overrightarrow{\text{م}} \parallel \overrightarrow{\text{ن}}$ ② أوجد أ ∈ ح إذا كان $\overrightarrow{\text{ل}} \parallel \overrightarrow{\text{م}}$

③ أوجد ب ∈ ح إذا كان $\overrightarrow{\text{و}} \perp \overrightarrow{\text{ن}}$ ④ هل $\overrightarrow{\text{و}} \perp \overrightarrow{\text{م}}$ ؟ فسر إجابتك .

[٤] فى الشكل المقابل : أ ب جـ ء متوازى أضلاع م نقطة تقاطع قطريه أكمل :



① $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = ... ② $\overrightarrow{\text{ء أ}} + \overrightarrow{\text{ء جـ}}$ = ...

③ $\overrightarrow{\text{أ م}} + \overrightarrow{\text{م جـ}}$ = ... ④ $\overrightarrow{\text{أ ب}} + ٢\overrightarrow{\text{ب م}}$ = ...

⑤ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ + ... = $٢\overrightarrow{\text{أ م}}$ ⑥ $\overrightarrow{\text{أ ب}} - \overrightarrow{\text{أ م}}$ = ...

أ ، ء ، جـ ، ب ، م

[٥] إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ = (١ ، − ٤) ، أ (٢ ، ٣) ، جـ (− ١ ، ١٥)

، أوجد قيمتى ل ، م إذا كان : ل $\overrightarrow{\text{أ}}$ − م $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\overrightarrow{\text{جـ}}$

[٦] أ ب جـ ء مستطيل حيث أ (− ١ ، − ٢) ، ب (٥ ، ١) ، جـ (٣ ، ك)

أوجد : ① قيمة ك ② إحداثى نقطة ء

اختبار تراكمى

[١] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

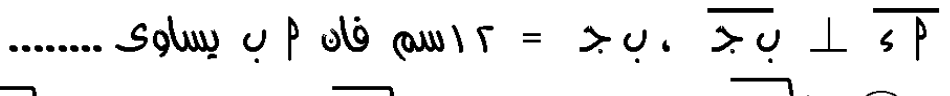
❶ ميل المستقيم المار بالنقطتين أ (٣ ، ٤) ، ب (− ١ ، ٢) يساوى ....

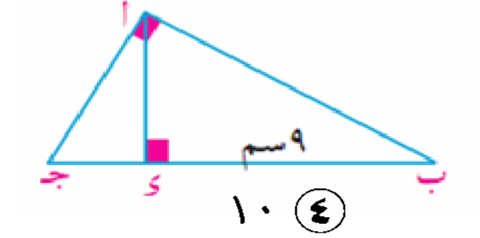
(١) − ٢ (٢) ٢ (٣) $\frac{١}{٢}$ (٤) $\frac{١}{٤}$

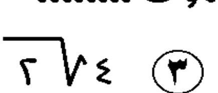
❷ فى المثلث أ ب ج : ق (∠ أ) = ٩٠° ، جتا ج = ٠,٦ فإن ظا ب يساوى ....:

(١) ٠,٤ (٢) $\frac{٣}{٤}$ (٣) $\frac{٤}{٣}$ (٤) $\frac{-٤}{٣}$

❸ فى الشكل المقابل :

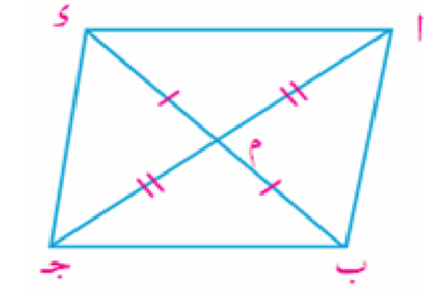

أ ء ⊥ ب ج ، ب ج = ١٢ سم فإن أ ب يساوى ....



(١) ٨ $\sqrt{٢}$ (٢) ٦ $\sqrt{٣}$ (٣)  ٤ $\sqrt{٢}$ (٤) ١٠

❹ فى الشكل المقابل :


جميع العبارات التالية تعبر عن أ ج عدا العبارة ....:



(١) ٢ أ م (٢) أ ء + ء ج

(٣) أ ب + ب ء (٤) ب ج + ء ج

❹ المتجه م = (١٢ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{\pi}{٤}$) يعبر عنه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين بالصورة ....:

(١) ٦ س + ٦ ص (٢) ١٢ س − ١٢ ص

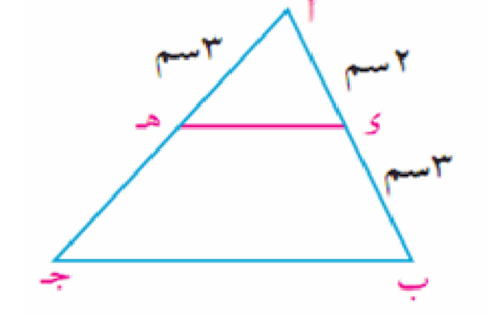
(٣) − ٦ س − ١٢ ص (٤) ١٢ س + ١٢ ص

[٢] أ ب ج ء شكل رباعى ، إذا كان : أ ج + ء ب = ٢ ء ج

اثبت أن : أ ب ج ء متوازى أضلاع

[٣] أ ب جـ Δ . اثبت أن : $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{جـأ} = \overrightarrow{٠}$

[٤] فى الشكل المقابل :



$\overline{ىهـ} \parallel \overline{بجـ}$ أوجد قيم ك ، ل ، م ، ن العددية إذا كان :

① $\overrightarrow{بى} = ك \overrightarrow{ىأ}$　　② $\overrightarrow{جـهـ} = ل \overrightarrow{جـأ}$

③ $\overrightarrow{بجـ} = م \overrightarrow{هـى}$　　④ $\overrightarrow{أى} + \overrightarrow{ىهـ} = ن \overrightarrow{أجـ}$

[٥] إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٣ ، -٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢ ، ٧)$ أوجد :

① $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$　　② $\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$　　③ $٢\overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{ب}$

[٦] فى مستوى إحداثى متعامد ، نقطة الأصل و (٠ ، ٠) ، إذا كان أ (-١ ، -٤) ، ب (١ ، ١) ، جـ (٦ ، -١)

① أوجد كل من $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بجـ}$ بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين .

② اثبت أن : $\overrightarrow{أب} \perp \overrightarrow{بجـ}$.

[٧] فى مستوى إحداثى متعامد ، إذا كان : $\overrightarrow{ل} = ٢\overrightarrow{س} - ٢\sqrt{٣}\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{م} = -\overrightarrow{س} + ٤\sqrt{٣}\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ن} = ٣\overrightarrow{س} + ٢\sqrt{٣}\,\overrightarrow{ص}$.

أوجد $\overrightarrow{جـ}$ فى الصورة القطبية حيث $\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{ل} + \overrightarrow{م} + \overrightarrow{ن}$

[٨] باستخدام المتجهات أثبت أن : النقط أ (٥ ، ١) ، ب (٧ ، ٢) ، جـ (٤ ، -٤) ، ى (-١ ، -٢) هى رؤوس مربع ، وأوجد مساحته .

تمارين (٥) على التقسيم

[١] أكمل كلا مما يأتى بالإجابة الصحيحة :

❶ $\overline{مب}$ قطر فى دائرة م إذا كانت م (٣ ، –١) ، م هى نقطة الأصل فان إحداثى نقطة ب ....

❷ م ب جـ مثلث فيه م (٠،١) ،ب(٠ ، ٣) ، جـ(٣ ، ٢) فان نقطة تلاقى متوسطاته هى ....

❸ إذا كانت م (١ ، ص) ، ب(٣ ، –١) وكانت جـ منتصف $\overline{مب}$ حيث جـ(س ، ٣)

فان س = ... ، ص = ...

❹ إذا كانت جـ(٦ ، ٢) منتصف $\overline{مب}$ حيث م (٥ ، ٣) فان ب = ...

❺ إحداثى نقطة منتصف $\overline{مب}$ هى .... حيث م (٤ ، ١) ، ب(٢ ، –٤)

❻ إذا كانت جـ منصف $\overline{مب}$ حيث م(٣ ، ٤) ، ب(١ ، ٦) . فان إحداثى جـ = ...

❼ إذا كانت $\overline{مء}$ متوسط فى △ م ب جـ حيث م = (١ ، ٢) ، ء = (٤ ، –٤)

فإن نقطة تلاقى متوسطات △ م ب جـ هى(................ ، ....)

❽ نقطة تلاقى متوسطات المثلث م و ب حيث و نقطة الأصل ، م(٠ ،٦) ، ب (–٦ ، ٠) هى .....

❾ إذا كانت $\overline{جء}$ قطر فى دائرة مركزها م حيث م(٣ ، ٥) ، جـ(٢ ، ١) فان إحداثى ء = ...

❿ النقطة التى تقسم $\overline{مب}$ من الداخل بنسبة ١ ، ١ حيث م(٠ ،٨) ، ب(٦ ، ٠) هى

⓫ إذا كانت نقطة الأصل منتصف $\overline{مب}$ حيث م (–٣ ، ٢) فان إحداثى نقطة ب = ...

⓬ إذا كان جـ منتصف $\overline{مب}$ ، جـ(س ، ٢) ، م (س + ١ ، ٥) ، ب(٢س – ٣ ، –١)فان س = ...

⓭ إذا كانت م (–٤ ، ٤) ، ب(٥ ، –٨) ، جـ ∈ $\overline{مب}$ بحيث جـ ب : م جـ = ١ : ٢ فان : جـ =......

⓮ إذا كانت $\overline{مء}$ متوسط فى △ م ب جـ فيه م (١ ، ٢) ، ء(٤ ، –٤)

فان نقطة تلاقى متوسطات △ م ب جـ هى (...... ، ......)

⓯ إذا كانت : م (–٣ ، ٤) ، ب(٦ ، –٨) فان محور السينات يقسم $\overline{مب}$ بنسبة ... : .... من الداخل

⓰ إذا كانت : م (–٢ ، ٣) ، ب(–٤ ، ٠) ، $\overleftrightarrow{مب}$ يقطع محور الصادات فى جـ

فان جـ تقسم $\overline{مب}$ بنسبة .... : .... من الخارج



[٢] في الشكل المقابل :

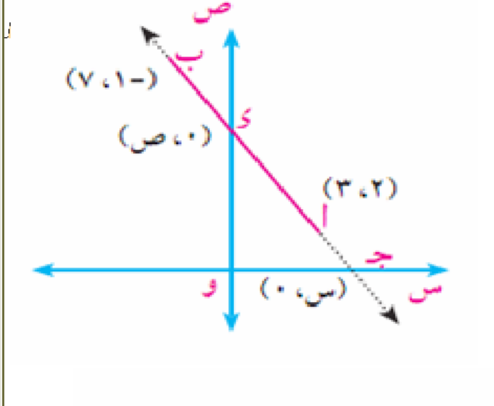
إذا كانت أ (٢ ، ٣) ، ب (– ١ ، ٧)

، جـ ، ء نقطتان تقعان على محورى الإحداثيات

① جـ تقسم $\overline{أب}$ من .... ونسبة التقسيم هى ...... : ....

② ء تقسم $\overline{أب}$ من .... ونسبة التقسيم هى ...... : ....

③ إحداثيا نقطة جـ هى .... ④ إحداثيا نقطة ء هى ....

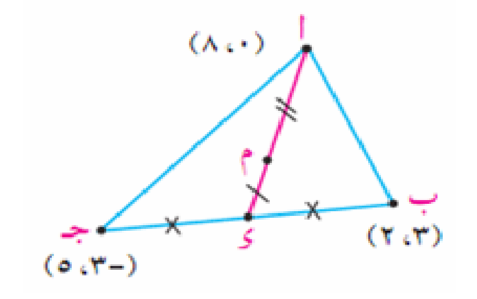


[٣] في الشكل المقابل :

$\overline{أء}$ متوسط فى △ أ ب جـ ، م نقطة تلاقى المتوسطات

، حيث أ (٠ ، ٨) ، ب(٣ ، ٢) ، جـ(– ٣ ، ٥)

① أوجد إحداثيا نقطة ء ② إحداثيا نقطة م



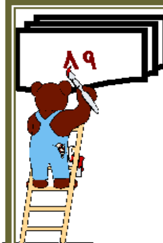
[٤] إذا كانت : أ ∈ محور السينات ، ب ∈ محور الصادات ، جـ(–٤ ، ٣) منتصف $\overline{أب}$ فأوجد إحداثيي كل من أ ، ب « (–٨، ٠)، (٠، ٦) »

[٥] النقط أ (٨ ، ٤) ، ب(٢ ، – ٤) ، جـ(– ٢ ، – ١) اثبت أنها ثلاث رؤوس لمستطيل أ ب جـ ء . أوجد إحداثى ء « (٤، ٧) »

[٦] أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، م نقطة تلاقى قطريه فإذا كانت أ (– ٣ ، ٥) ، ب(١ ، ٧) ، م(١ ، ١) أوجد إحداثى كل من جـ ، ء واحسب طول القطر $\overline{بء}$ « (٥، –٣)، (١، –٥)، ١٢ »

[٧] أ (٧ ، – ٢) ، ب(١٥ ، ٤) ، جـ(١ ، ٠) رؤوس لمتوازى أضلاع اثبت أن : إحداثيات الرأس الرابعة ء(س ، ص) تحقق العلاقة س + ص + ١٣ = ٠

[٨] إذا كانت أ(– ٥ ، – ٤) ، ب(٢ ، – ٤) أوجد إحداثى النقطة جـ التى تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٤ : ٣ « (–١، –٤) »



[٩] إذا كانت : أ (٣ ، ١) ، ب (−٢ ، ٥) أوجد إحداثيات النقطة جـ التى تقسم $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ من الداخل ٢ : ٣

[١٠] إذا كانت أ (٠ ، −٣) ، ب (٣ ، ٦) فأوجد إحداثيي النقطة جـ التى تقسم $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢

[١١] إذا كانت أ ((٢ ، ٥) ، ب (٧ ، −١) أوجد إحداثى النقطة جـ التى تقسم $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢ (((١٧ ، −١٣)))

[١٢] أ ، ب ، جـ هى (٢ ، ٥) ، (−١ ، −١) ، (−٢ ، ٣) على الترتيب أوجد إحداثى كل من

❶ النقطة ء التى تقسم $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ من الداخل بنسبة ٢ : ١

❷ النقطة هـ التى تقسم $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ من الخارج بنسبة ٣ : ١ (((٠ ، ١) ، (−٤ ، ٢)))

[١٣] إذا كان أ (−٥ ، ٧) ، ب (٧ ، −٥) أوجد إحداثيات النقط التى تقسم القطعة $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ الى أربع قطع متساوية فى الطول (((−٢ ، ٤) ، (١ ، ١) ، (٤ ، −٢)))

[١٤] إذا كانت : أ (٢ ، ١) ، ب (−١ ، −٢) فأوجد إحداثيي النقطة جـ ∈ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، جـ ∉ $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث بعدها عن أ أربعة أمثال بعدها عن ب (((−٢ ، −٣)))

[١٥] إذا كانت أ (٨ ، −١) ، ب (−١ ، −٤) أوجد إحداثى النقطتين اللتين تقسمان $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ إلى ثلاث قطع متساوية فى الطول (((٥ ، −٢) ، (٢ ، −٣)))

[١٦] أوجد إحداثى النقطة جـ التى تقع عند خمس المسافة من النقطة أ (−١ ، −١) إلى النقطة ب (٩ ، ٤) (((١ ، ٠)))

[١٧] إذا كانت : أ (٨ ، −٤) ، ب (−١ ، ٢) فأوجد إحداثيا النقطتين اللتين تقسمان $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ إلى ثلاث أجزاء متساوية فى الطول

[١٨] إذا كانت م (٤ ، ٧) ، ب (−٢ ، −٢) ، جـ (٠ ، ٥) ، ء تقسم $\overline{\text{م ب}}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢ أوجد طول $\overline{\text{جـ ء}}$ « ٥√٢ »

[١٩] إذا كانت : جـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب م}}$ ، جـ ∉ $\overline{\text{م ب}}$ وكانت م (٣ ، ١) ، ب (٤ ، ٢) وكان م جـ = ٢ م ب أوجد إحداثيا نقطة جـ

[٢٠] إذا كانت : م (١ ، ٣) ، ب (−٤ ، −٢) أوجد إحداثيا النقطة جـ اذا كانت جـ ∈ $\overleftarrow{\text{م ب}}$ بحيث ٣ م جـ = ٢ جـ ب

[٢١] إذا كانت م (٢ ، −٣) ، جـ (−١ ، ٤) ، جـ ∈ $\overleftarrow{\text{م ب}}$ بحيث أن جـ ب = ٢ م جـ أوجد إحداثى النقطة ب « (−٧ ، ١٨) »

[٢٢] إذا كانت النقط م (٣ ، −٤) ، ب (ك ، ١) ، جـ (−١ ، م) على استقامة واحدة ، جـ ∈ $\overline{\text{م ب}}$ ، $\frac{\text{م جـ}}{\text{جـ ب}} = \frac{٢}{٣}$ أوجد قيمة : م ، ك « −٢ ، −٧ »

[٢٣] إذا كانت : م (٣ ، −٤) ، ب (−٢ ، ٣) فأوجد إحداثيى النقطة جـ التى تقسم $\overline{\text{م ب}}$ ، جـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ إذا كان :

❶ ٢ م جـ = جـ ب
❷ ٥ م جـ = ٣ جـ ب
❸ ٣ م جـ = ٥ جـ ب
❹ ٥ م جـ = ٣ م ب

[٢٤] إذا كانت : م (٢ ، −١) ، ب (−٥ ، ٣) ، جـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ بحيث ٢ م جـ = ٣ جـ ب أوجد إحداثيى النقطة جـ التى تقسم $\overline{\text{م ب}}$ إذا كان :

❶ التقسيم من الدخل
❷ التقسيم من الخارج « (−٢٫٢ ، ١٫٤) ، (−١٩ ، ١١) »

[٢٥] أوجد نقطة تلاقى متوسطات المثلث م ب جـ حيث م (٢ ، ٧) ، ب (٦ ، ٣) ، جـ (−٥ ، −١) « (١ ، ٣) »

[٢٦] النقطة م (٢ ، −١) هى نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب جـ فإذا كانت أ (٥ ، −٤) ، ب (−٣ ، ٢) فما إحداثى نقطة جـ « (٤ ، −١) »

[٢٧] إذا كانت : أ ، ب ، جـ ثلاث نقط تقع على استقامة واحدة حيث : أ (٢ ، ٥) ، ب (٥ ، ٢) ، جـ (٤ ، ص) . أوجد النسبة التى تقسم بها النقطة جـ القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أب}$ مبينا نوع التقسيم ، ثم أوجد قيمة ص .

[٢٨] إذا كانت أ (−٤ ، ٣) ، ب (٨ ، ٦) ، جـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ حيث جـ (س ، ٠) ، فأوجد النسبة التى تقسم بها $\overrightarrow{أب}$ بالنقطة جـ مبينا نوع التقسيم ، ثم أوجد قيمة س .

[٢٩] إذا كانت : أ (٣ ، −٢) ، ب (−٢ ، ٣) فأوجد النسبة التى تقسم بها النقطة جـ (٨ ، −٧) القطعة $\overline{أب}$ مبينا نوع التقسيم « ١ : ٢ من الخارج »

[٣٠] أوجد النسبة التى يقسم بها محور الصادات القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ حيث أ (٢ ، ٣) ، ب (−٣ ، ٧) مبينا نوع التقسيم وأوجد نقطة التقسيم « $\frac{٢}{٣}$ من الداخل ، (٠ ، $\frac{٢٣}{٥}$) »

[٣١] إذا كانت : أ (−٢ ، ٣) ، ب (٤ ، −٢) فأوجد النسبة التى يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ مبينا نوع التقسيم وأوجد نقطة التقسيم « $\frac{٣}{٢}$ من الداخل ، ($\frac{٨}{٥}$ ، ٠) »

[٣٢] اثبت أن النقط أ (١ ، −٣) ، ب (٣ ، ٥) ، جـ (٥ ، ١٣) تقع على استقامة واحدة ثم أوجد النسبة التى تنقسم بها القطعة $\overline{أب}$ بالنقطة جـ مبينا نوع التقسيم « ٢ : ١ من الخارج »

[٣٣] أ (٨ ، ٣) ، ب (−٦ ، −٤) فإذا كانت جـ نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{أب}$ مع محور السينات فأوجد النسبة أ جـ : جـ ب « ٣ : ٤ من الداخل »

[٣٤] إذا كانت أ (٢ ، ٤) ، ب (−١ ، −٣) وكانت القطعة أب تقطع المحورين السينى والصادى فى جـ ، ء على الترتيب أوجد النسبة التى تنقسم بها أب بكل من جـ ، ء مبينا نوع التقسيم « ٤ : ٣ ، ٢ : ١ »

[٣٥] إذا كانت أ ∈ محور السينات ، ب ∈ محور الصادات ، النقطة جـ (٧ ، −٣) هى منتصف أب أوجد إحداثى كل من أ ، ب « (١٤ ، ٠) ، (٠ ، −٦) »

[٣٦] أ (٢ ، ٥) ، ب (٥ ، ٢) ، جـ (٤ ، ص) وكانت أ ، ب ، جـ تنتمى لمستقيم واحد ، أوجد النسبة التى تقسم بها النقطة جـ القطعة أب مبينا نوع التقسيم ثم أوجد قيمة ص « ٢ : ١ ، ٣ »

[٣٧] أ (٢ ، ٢) ، ب (٥ ، ٦) ، جـ (١٠ ، −٤) رؤوس مثلث ، ب ∈ ب جـ بحيث أب : أجـ = ب ء : ء جـ أوجد إحداثى نقطة ء « ($\frac{٢٠}{٣}$ ، $\frac{٨}{٣}$) »

[٣٨] أ ب جـ ء متوازى أضلاع رؤوسه أ ، ب ، جـ هى النقط (٢ ، ٣) ، (٥ ، ١) ، (٦ ، ٧) على الترتيب أوجد إحداثى نقطة ء ثم أوجد النسبة التى يقسم بها محور الصادات القطعة ء جـ مبينا نوع التقسيم « (٣ ، ٩) ، ١ : ٢ من الخارج »

[٣٩] أ ب جـ مثلث رؤوسه هى أ (٧ ، ٤) ، ب (−٨ ، ١) ، جـ (−٣ ، ٧) فإذا كانت ء تقسم أب من الداخل بنسبة ١ : ٢ ، رسم ء هـ // ب جـ حيث ء هـ ∩ أجـ اوجد إحداثى ء ، هـ « (٢ ، ٣) ، (٤ ، ٥) »

[٤٠] إذا كانت أ (٥ ، ٢) ، ب (−٣ ، ١) فأوجد النسبة التى تنقسم بها القطعة المستقيمة أب بكل من نقطتى تقاطع أب مع محورى الإحداثيات مبينا نوع التقسيم « ٢ : ١ من الخارج ، ٥ : ٣ من الداخل

[٤١] إذا كانت جـ ، ء نقطتى تقاطع $\overleftrightarrow{أ ب}$ مع محورى الإحداثيات فأوجد النسبة التى تقسم بها كل من جـ ، ء القطعة المستقيمة $\overline{أ ب}$ مبينا نوع التقسيم ، علماً بأن :

أ (−٥ ، ٧) ، ب (−٣ ، ٢) « ٧ : ٢ من الخارج ، ٥ : ٣ من الخارج »

[٤٢] اثبت أن : النقط أ (١ ، ٤) ، ب (٣ ، −٢) ، جـ (−٣ ، ١٦) تقع على استقامة واحدة ثم أوجد :

❶ النسبة التى تقسم بها أ القطعة المستقيمة $\overline{ب جـ}$ ، مبينا نوع التقسيم « ١ : ٢ من الداخل »

❷ النسبة التى تقسم بها ب القطعة المستقيمة $\overline{جـ أ}$ ، مبينا نوع التقسيم « ٣ : ١ من الخارج »

❸ النسبة التى تقسم بها جـ القطعة المستقيمة $\overline{أ ب}$ ، مبينا نوع التقسيم « ٢ : ٣ من الخارج »

[٤٣] أ (٧ ، −١) ، ب (٤ ، ٢) ، جـ (٢ ، ٤) اثبت أن النقط أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة ثم أوجد : ❶ النسبة التى تنقسم بها $\overline{أ ب}$ بنقط جـ « ٥ : ٢ »

❷ النسبة التى تنقسم بها $\overline{أ جـ}$ بالنقطة ب « ٣ : ٢ »

❸ النسبة التى تنقسم بها $\overline{جـ ب}$ بالنقطة أ « ٥ : ٣ » مبينا نوع التقسيم فى كل حالة

[٤٤] إذا كانت : أ (٢ ، ٢) ، ب (٥ ، ٦) ، جـ (١٠ ، −٤) هى رؤوس مثلث ، ء ∈ $\overline{ب جـ}$ بحيث ب ء : ء جـ = أ ب : أ جـ أوجد إحداثيى نقطة ء « $\left(\frac{٢٠}{٣} ، \frac{٨}{٣}\right)$ »

[٤٥] تتحرك سيارة نقل ركاب فى طريقها من المدينة أ الى المدينة ب (٥ ، −٦) ، ب (−١ ، ٠) وتوقفت مرتين أثناء سيرها . أوجد إحداثيات النقطتين التى توقفت عندهما السيارة إذا كانت : ① توقفت فى منتصف الطريق ② توقفت فى ثلثى الطريق من جهة النقطة أ .

تمارين (٦) على معادلة الخط المستقيم

[١] أكمل الجمل الآتية لتصبح عبارات صحيحة

١) ميل المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) يساوى ....

٢) ميل المستقيم الذى معادلته ٢ ص + ٣ س = . يساوى ....

٣) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بنقطة الأصل وبالنقطة (١ ، ٢) هى ....

٤) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، ٥) ويوازى محور السينات هى.......

٥) ميل المستقيم الذى معادلته س = ١ + ك ، ص = −٢ + ٣ ك يساوى ....

٦) إذا كان ميل مستقيم $\frac{٣}{٤}$ فان ميل أى مستقيم يوازيه يساوى ....

٧) المعادلة الكارتيزية للمستقيم المار بالنقطة (−٢ ، ٧) ويوازى محور الصادات هى ....

٨) المستقيم الذى معادلته ص = ٢ س + ١ يكون (.... ، ....) متجه اتجاه له

٩) المعادلة الموجهة للمستقيم المار بالنقطة (−٢ ، ٣) ويوازى محور السينات هى ....

١٠) المعادلة الموجهة للمستقيم المار بنقطة الأصل ويوازى المتجه أ = (١ ، −١) هى ....

١١) المعادلة المتماثلة للمستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٢) + ك (١ ، ١) هى ....

١٢) المعادلة الموجهة للمستقيم : ص = −٣ هى ....

١٣) المعادلتان الوسيطيتان للمعادلة : ص − س = . هما .... ، ....

١٤) إذا توازى المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٢) والمستقيم ص = أ س − ٣ فان : أ = ...

١٥) معادلة المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°
ويقطع جزءا موجبا قدره ٥ وحدات من محور الصادات هى ....

١٦) ميل المستقيم الذى معادلته $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٣) + ك (٠ ، −٢) يساوى ....

١٧) المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذى يقطع من المحورين السينى والصادى جزأين موجبين
مقدارهما ٢ ، ٣ على الترتيب هى ....

١٨) ميل المستقيم الذى معادلته $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٣) + ك (٠ ، −٢) يساوى ....

١٨) مساحة المثلث المحدد بحور السينات ومحور الصادات والمستقيم ٢ س + ٣ ص = ٦ تساوى......

[٢] بين أى العلاقات التالية تمثل بخط مستقيم

❶ ٣ س − ٢ ص = ٥ ❷ ص = $\sqrt{س}$ + ١ ❸ ص = ٢

❹ س − $\sqrt{٢}$ = ٠ ❺ ص + $\frac{١}{س}$ = ٢ ❻ $\frac{س}{٣}$ − $\frac{ص}{٢}$ = ١

[٣] إذا كانت : م (٣ ، −٢) ، ب (٥ ، ٦) ، جـ (١ ، −٢)

فأوجد ميل كل من المستقيمات الآتية : $\overleftrightarrow{م ب}$ ، $\overleftrightarrow{م جـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$

[٤] حاول أن تحل :

أوجد ميل الخط المستقيم المار بزوج من النقط التالية ، وبين أيا من هذه المستقيمات متوازية وأيها متعامد :

❶ (٣ ، ١) ، (−٢ ، ٥) ❷ (٤ ، ٠) ، (٢ ، −١)

❸ (٧ ، −١) ، (٣ ، −٣) ❹ (−٥ ، −٢) ، (−١ ، ٣)

[٥] إذا كانت معادلتا المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ هما على الترتيب :

٢ س − ٣ ص + م = ٠ ، ٣ س + ب ص − ٦ = ٠ فأوجد :

① ميل المستقيم $ل_١$ ② قيمة ب التى تجعل $ل_١$ ، $ل_٢$ متوازيين

③ قيمة ب التى تجعل $ل_١$ ، $ل_٢$ متعامدين ④ إذا كانت النقطة (١ ، ٣) تمر بالمستقيم $ل_١$ فأوجد قيمة م .

[٦] إذا كان المستقيم م س − ٤ ص + ٥ = ٠ يصنع زاوية ظلها ٠٫٧٥ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فأوجد قيمة م

[٧] أوجد المعادلة المتجهة للخط المستقيم الذى ميله $\frac{١}{٣}$ ويمر بالنقطة (٢ ، −١)

[٨] أوجد المعادلتين البارامتريتين للمستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° ويمر بالنقطة (٣ ، −٥)

[٩] اوجد الصورة المختلفة لمعادلة كل من المستقيمات التى يمر بالنقطتين :

❶ (٢ ، ٣) ، (٥ ، ١) ❷ (٥ ، ٠) ، (٠ ، –٧)

❸ (٣ ، ١) ، (٦ ، ٤) ❹ (أ ، ٠) ، (٠ ، ب)

[١٠] اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٣) والمتجه (٢ ، ٣) عمودى عليه

[١١] إذا كانت : أ (٠ ، ٢) ، ب (٢ ، ١) ، جـ (–٢ ، ٣)

ثلاث نقط فى المستوى ، فأوجد : ❶ المعادلة المتجهة للخط المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$

❷ اثبت أن أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة .

[١٢] ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة ، علامة (✗) أمام العبارة الخطأ مع بيان السبب

❶ المستقيمان : $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٥) + ك (٣ ، ٤) ، ٤س – ٣ص + ٧ = ٠ . متوازيان

❷ المستقيمان : س – ص + ١ = ٠ ، $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ١٠) + ك (١ ، ٢) متعامدان

❸ إذا كان $\overleftarrow{ى}$ = (٥ ، ٤) متجه اتجاه مستقيما ما فان قيمة متجه اتجاه اى مستقيم عمودى علي هو (٤ ، ٥)

❹ المستقيم الذى معادلته $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٣) + ك (–١ ، $\sqrt{٣}$) يصنع زاوية موجبه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ١٥٠°

❺ المستقيم الذى معادلته س = ٥ تكون معادلته الموجهة على الصورة

$\overleftarrow{ر}$ = (٥ ، ص) + ك (١ ، ٠) حيث ص ، ك ∈ ح

❻ النقطة (٢ ، ٥) تقع على المستقيم ٢س – ٣ص + ١١ = ٠

❼ النقطة (٢ ، ٥) تقع على المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (–٤ ، ٥) + ك (٢ ، –٣)

❽ النقطة (أ ، ٢ أ) تقع على المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = ك (١ ، ٢)

❾ المعادلتان : س + ص + ٢ = ٠ ، $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، –٣) + ك (١ ، –٢) هما صورتين مختلفتين لمستقيم واحد

[١٣] اوجد معادلة المستقيم الذى ميله م والمار بالنقطة (أ ، ٠)

ما هى إحداثيات نقطة تقاطع هذا الخط مع محور الصادات

[١٤] أكتب الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذى معادلته ٢ س − ٣ ص = ٦

[١٥] إذا كانت أ (٥ ، −٦) ، ب (٣ ، ٧) ، جـ (١ ، −٣) ثلاث نقط في المستوى ، فأوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة أ ، وينصف $\overline{\text{ب جـ}}$

[١٦] أكتب المعادلتين الوسيطيتين للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٠ ، ٥) ومتجه اتجاه له (−١ ، ١) .

[١٧] أوجد المعادلة الكارتيزية للمستقيم المار بالنقطة (٣ ، −٥) ويوازى المستقيم : س + ٢ ص − ٧ = ٠

[١٨] إذا كان : $\overleftarrow{ى}$ = ($\frac{١}{٢}$ ، ١) متجه اتجاه للمستقيم فان جميع المتجهات التالية عموديا على المستقيم ماعدا المتجه :

❶ (١ ، $\frac{-١}{٢}$) ❷ (٢ ، −١) ❸ (−١ ، $\frac{-١}{٢}$) ❹ (٤ ، −٢)

[١٩] اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −٣) وميله م = ٢ إذا كان هذا المستقيم يمر بالنقطتين (أ ، ٧) ، (٥ ، ب) فاوجد أ ، ب

[٢٠] اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) والمتجه أ ب ، حيث أ = (١ ، ٣) ، ب = (٢ ، ٤) ، متجه اتجاه له

[٢١] أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٥ ، ٧) وعمودى على المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٠) + ك (٤ ، ٣)

[٢٢] إذا كان : (−٤ ، ١) = (٣ ، ص) + ك (١ ، −٢) فأوجد قيمة كل من ك ، ص

[٢٣] أوجد المعادلات المتجهة ، والمعادلات الكارتيزية للخط المستقيم المار بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) ومتجه الاتجاه له $\overleftarrow{ى}$ = (أ ، ب) فى الحالات الآتية :

❶ إذا كان المستقيم يوازى محور الصادات . ❷ إذا كان المستقيم يوازى محور السينات .

❸ إذا كان المستقيم يمر بنقطة الأصل .

[٢٤] إذا كانت أ(١،٤) ، ب(−٤،٦) فأوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقسيم $\overline{أ ب}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣ ويكون عموديا على المستقيم : ٥ س − ٤ ص − ١٢ = ٠

[٢٥] أكتب الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذى معادلته المار بالنقطة ق (٢ ، −٣) عموديا على المتجه $\overleftarrow{ى}$ (−١ ، ٢) .

[٢٦] اكتب الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −١) ، ومتجه اتجاهه (٣ ، ١)

[٢٧] أكتب الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (−٢ ، ١) ويكون موازيا للمستقيم ٣ س − ٢ ص + ٥ = ٠

[٢٨] أكتب الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −١) ويكون ويوازى المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (−٢ ، ١) + ك (٣ ، −٤)

[٢٩] أكتب الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (١،١) ويكون ويوازى المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٣) + ك (٢، −٣) واثبت أنه يمر بالنقطة (٣ ، −٢)

[٣٠] أكتب الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٣) ويكون عموديا على المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٥) + ك (−٢ ، ١)

[٣١] أوجد المعادلة المتجهة للمماس للدائرة م عندالنقطة ب حيث أ(٢،٠) ، ب (٣،٢)

[٣٢] في المثلث أ ب جـ ، أ (٦ ، ١) ، ب (−١ ، ٢) ، جـ (٣ ، −٢)

(١) اثبت أن المثلث قائم الزاوية وأوجد مساحته .

(٢) ء ∈ $\overline{أب}$ بحيث أ ء : ء ب = ٢ : ٣ أوجد إحداثيى نقطة ء

(٣) أكتب الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطتين جـ ، ء

[٣٣] الربط بالهندسة :

$\overline{أب}$ قطر في دائرة مركزها م فإذا كان ب(−٧ ، ١١) ، م (−٢ ، ٣)

فأوجد معادلة المماس للدائرة عند نقطة أ .

[٣٤] هل تقع النقطة (٢ ، ٣) على المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ١) ، (صفر ، −١)

[٣٥] إذا قطع المستقيم : ٣ س + ٤ ص − ١٢ = ٠ محورى الإحداثيات السينى والصادى فى النقطتين أ ، ب على الترتيب فأوجد :

❶ مساحة المثلث △ و أ ب حيث و نقطة الأصل .

❷ معادلة المستقيم العمودى على $\overline{أب}$ ويمر بنقطة منتصفها .

[٣٦] اوجد الصورة المختلفة لمعادلة كل من المستقيمات الآتية :

❶ المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) موازيا للخط المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٢ ، ٤)

❷ المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٣) عموديا على الخط المستقيم : ٢ س + ٣ ص + ٤ = صفرا

❸ المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) ويوازى المستقيم س = ٢ − ٣ك ، ص = ٣ + ٢ك

❹ المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) وعمودى على المستقيم س = ٢ − ٣ك ، ص = ٣ + ٢ك

[٣٧] اثبت أن النقط : أ (٢ ، −٣) ، ب(٧ ، ٢) ، جـ (١ ، ١) هى رؤوس مثلث . وإذا علم أن ء ∈ $\overline{أب}$ بحيث أ ء : أ ب = ٢ : ٥

فأوجد إحداثيى النقطة ء أكتب الصور المختلفة لمعادلة المستقيم $\overleftrightarrow{جـ ء}$

تمارين (٧) على معادلة الخط المستقيم

[١] أكمل كلا مما يأتي بالاجابة الصحيحة :

١) معادلة المستقيم الذى يقطع من محور السينات الموجب جزء قدرة ٦ وحدات ويقطع من محور السينات السالب جزء قدرة ٣وحدات هى ....

٢) معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، – ٤) ، (٥ ، ٠) هى ....

٣) المستقيم الذى معادلته ٤ س + ٦ ص = ٦ يقطع من محور الصادات الموجب جزء قدرة ....

٤) المستقيم الذى معادلته $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٢} = ٢$ يقطع من محور السينات الموجب جزء قدرة .... بينما من محور الصادات الموجب جزء قدرة ....

٥) المستقيم الذى معادلته $\frac{س}{٢}$ + ص = ٦يصنع مثلثا مع محورى الإحداثيات مساحة سطحه ...... وحدة طول

٦) المقطوعة السينية للمستقيم الذى معادلته ٤ س + ص = ٨ تساوى .... بينما المقطوعة الصادية له تساوى .....

٧) المستقيم الذى معادلته ٤ س + ٣ ص = ٢٤ يمر بالنقطة (٠ ، ....)ويقطع محور السينات فى النقطة ......

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) المعادلة المستقيم المارة بالنقطتين (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٣) هى ....

① $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$ ② $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ٦$ ③ $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ٠$ ④ $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = -١$

٢) المستقيم الذى معادلته $\frac{٢س}{٧} + \frac{ص}{٣} = ١$ يقطع محور السينات جزء قدرة ....

① ٧ ② ٣ ③ $\frac{٧}{٢}$ ④ $\frac{٢}{٧}$

٣) المستقيم الذى معادلته ٣ س + ٨ ص = ٢٤ يصنع مثلثا مساحة سطحه ..... وحدة مربعة مع محورى الإحداثيات

① ١٢ ② ٦ ③ ٨ ④ ٢٤

٤) نقطة تقاطع المستقيم ٢ س + ٣ ص = ٦ مع محور السينات هى ....

① (٢ ، ٠) ② (٣ ، ٠) ③ (٠ ، ٢) ④ (٠ ، ٣)

٥ نقطة تقاطع المستقيم ٢س − ص = ٤ مع محور الصادات هى ....

① (٠ ، ٤) ② (٢ ، ٠) ③ (٠ ، −٤) ④ (٠ ، ٢)

[٣] أوجد طولى الجزءين المقطوعين من المحورين بالمستقيم : ٥س − ٣ص = ١٥

[٤] أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات جزأين موجبين مقداريهما ٢ ، ٧ وحدة طول

[٥] أوجد معادلة الخط المستقيم الذى مقطوعته السينية تساوى ٢ وحدة طول ومقطوعته الصادية تساوى وحدة طول واحدة

[٦] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، −١) ، (−٣ ، ٠)

[٧] أوجد المقطوعتين السينية والصادية للمستقيم ٣ س + ٢ ص = ٥

[٨] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −٥) ويوازى المستقيم $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{٢} = ١$

[٩] أوجد المعادلة العامة للمستقيمات فى الحالات الآتية :

① يقطع محورى الإحداثيات فى النقطتين (٣ ، ٠) ، (٠ ، −٤)

② يمر بالنقطة (٣ ، ١) ويوازى المستقيم : ٢ س − ٣ ص − ٧ = ٠

③ يمر بالنقطة (٠ ، −١) ومتجه الاتجاه له (٢ ، −٣) .

[١٠] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ١) ويوازى المستقيم ٢س + $\frac{ص}{٣} = ١$

[١١] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٥) وعمودى على المستقيم $\frac{س}{٢} + ص = ٣$

[١٢] أوجد مساحة المثلث المحدد بمحور الإحداثيات والمستقيم $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٤} = ١$

[١٣] اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٥) وميله سالب والذى يصنع مع محورى الإحداثيات مثلثا مساحته عشر وحدات مربعة

[١٤] أوجد مساحة المثلث المحدد بمحور الإحداثيات والمستقيم ٤ س + ٥ ص = ٢٠

[١٥] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) وميله سالب ويصنع مع محورى الإحداثيات مثلث مساحته ٣٠ وحدة مربعة

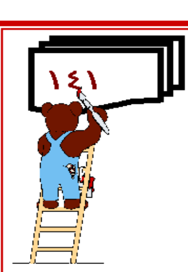
[١٦] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ ، ١) وميله سالب ويصنع مع محورى الإحداثيات مثلثا مساحته ٩ وحدة مربعة .

[١٧] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٥) وميله سالب ويصنع مع محورى الإحداثيات مثلثا مساحته عشر وحدة مربعة .

[١٨] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٠) وميله سالب ويصنع مع محورى الإحداثيات مثلثا مساحته ١٥ وحدة مربعة .

[١٩] أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات جزأين موجبين مجموعهم ٩ ويمر بالنقطة (١ ، ٢)





تمارين (٨) على الزاوية بين مستقيمين

[١] أكمل الجمل الآتية لتصبح عبارات صحيحة

١) قياس الزاوية بين المستقيمين الذى ميليهما $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{-٥}{٢}$ هى ....°

٢) قياس الزاوية بين المستقيمين الذى ميليهما $\frac{١}{٢}$ ، ٣ هى ....°

٣) قياس الزاوية بين المستقيمين الذى ميليهما صفر ، ١ هى ....°

٤) إذا توازى المستقيمان : أ س + ٣ ص − ٧ = ٠ ، ٢ س − ٣ ص + ٥ = ٠
فإن أ = ...

٥) قياس الزاوية بين المستقيمين س = ٧ ، ص = −٥ هى ....°

٦) قياس الزاوية بين المستقيمين الذى ميليهما $-\sqrt{٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ هى ....°

٧) قياس الزاوية بين المستقيمين الذى ميليهما صفر ، غير معرف هى ....°

٨) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين اللذين ميليهما ٢ ، $\frac{-١}{٢}$ تساوى ....°

٩) قياس الزاوية بين المستقيمين ٢ س + ص = ٨ ، ٤س − ٣ص = ١ هى ....°

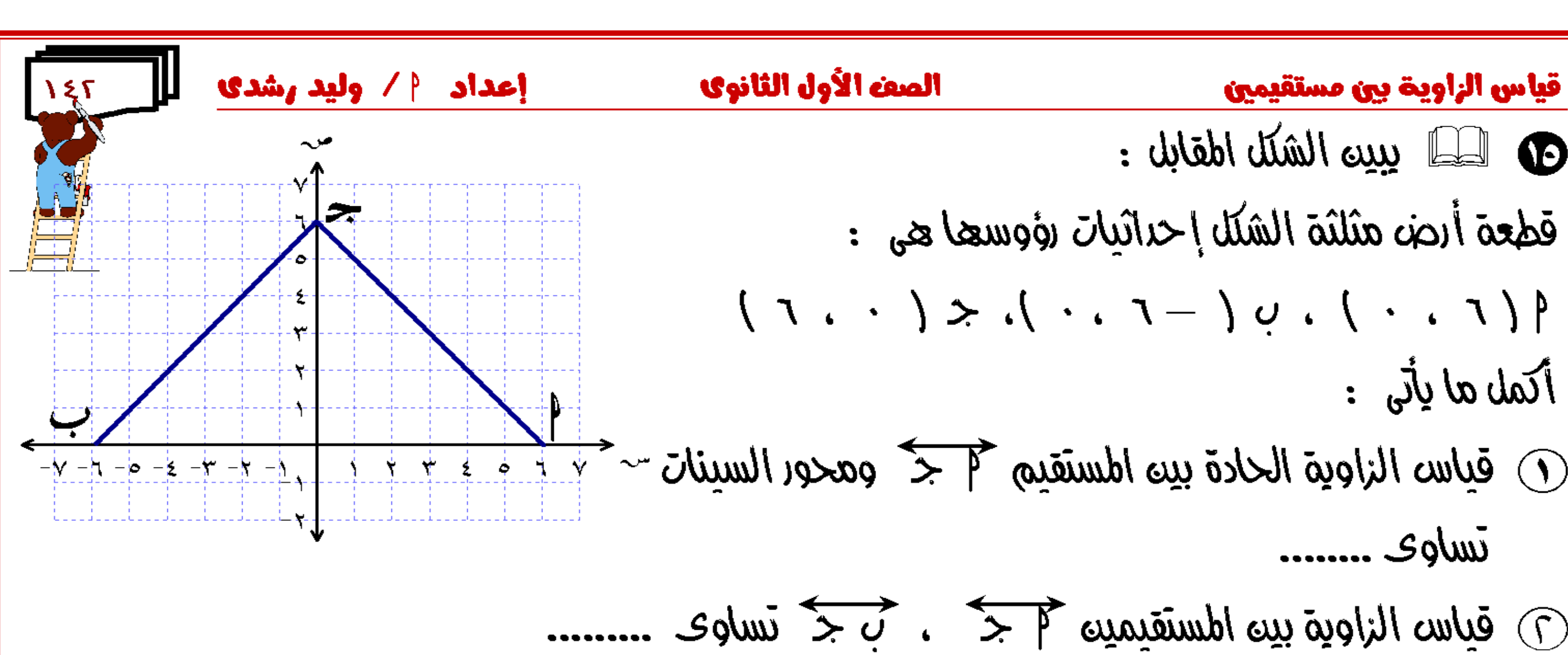
١٠) إذا تعامد المستقيمان : أ س + ٧ ص − ٩ = ٠ ، ٧ س − ٢ ص + ١٢ = ٠
فإن أ = ...

١١) قياس الزاوية بين المستقيمين س − ص − ٥ = ٠ ، ص = ٣س − ٨ هى ....°

١٢) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين س = ٣ ، ص = ٤ تساوى ....°

١٣) قياس الزاوية بين المستقيمين س= ص + ٤ ، ص = ٧ − س هى ....°

١٤) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : $\vec{ر}$ = (٢ ، ٢) + ك (١ ، ١)
والمستقيم س = ٠ هى ......



١٥ 📖 يبين الشكل المقابل :

قطعة أرض مثلثة الشكل إحداثيات رؤوسها هى :

أ (٦ ، ٠) ، ب (−٦ ، ٠)، ج (٠ ، ٦)

أكمل ما يأتى :

(١) قياس الزاوية الحادة بين المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ج}}$ ومحور السينات تساوى ....

(٢) قياس الزاوية بين المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{أ ج}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب ج}}$ تساوى ....

(٣) المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ج}}$ هى ....

(٤) المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب ج}}$ هى ....

(٥) المعادلة الكارتيزية للمستقيم المار بالنقطة ج ، ويوازى $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ هى ....

(٦) مساحة سطح المثلث أ ب ج تساوى ....

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قياس الزاوية بين المستقيمين س = ٤ ، ص − ٧ = ٠ هى ....

(١) $\frac{\pi}{٣}$　　(٢) $\frac{\pi}{٤}$　　(٣) $\frac{\pi}{٢}$　　(٤) غير ذلك

٢ 📖 قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ١) ، (−١ ، ٠) والاتجاه الموجب لمحور السينات تساوى :

(١) صفر°　　(٢) ٤٥°　　(٣) ٦٠°　　(٤) ٩٠°

٣ 📖 قياس الزاوية الحادة بين المستقيم $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٠ ، ٣) + ك (١ ، ١) و المستقيم س = ٠ تساوى :

(١) ٣٠°　　(٢) ٤٥°　　(٣) ٦٠°　　(٤) ٩٠°

٤ قياس الزاوية بين المستقيمين ٣ س + ٤ ص + ٩ = ٠ ، ص = $\frac{٤}{٣}$ س + ٧ هى ....

(١) $\frac{\pi}{٣}$　　(٢) $\frac{\pi}{٦}$　　(٣) $\frac{\pi}{٢}$　　(٤) π

❺ قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيمين $\sqrt{3}$ س − ص = ٤ ، ص = ٣ تساوى

(١) ٣٠° (٢) ٤٥° (٣) ٦٠° (٤) ٩٠°

❻ المستقيم العمودى على المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٥) + ك ($\sqrt{3}$ ، ١) يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها

(١) ٣٠° (٢) ٦٠° (٣) ١٢٠° (٤) ١٥٠°

❼ قياس الزاوية الحادة بين المستقيم ص = ٢ ، المستقيم الذى ميله − ١ هى ....

(١) ٤٥° (٢) ٣٠° (٣) ٦٠° (٤) غير ذلك

[٣] إذا كان $ل_1$: أ س − ٣ ص + ٧ = ٠ ، $ل_2$: ٤ س + ٦ ص − ٥ = ٠ ، $ل_3$: $\frac{س}{٣} - \frac{ص}{٢} = ٣$ فأوجد قيمة أ التى تجعل :

(١) $ل_1 \parallel ل_3$ (٢) $ل_1 \perp ل_2$

[٤] اذكر العلاقة بين المستقيمين $ل_1$ ، $ل_2$ فى الحالات التالية :

(١) إذا كان ظل الزاوية بينهما يساوى صفر . (٢) إذا كان ظل الزاوية بينهما غير معرف .

(٣) إذا كان ميل $ل_1$ هو $م_1$ ، ميل $ل_2$ هو $م_2$ فاذكر العلاقة بين $م_1$ ، $م_2$

[٥] أوجد قياس الزاوية الحادة المحصورة بين أزواج المستقيمات الآتية :

❶ $\overleftarrow{ر}$ = (٥ ، ٠) ، س − ص = − ٤

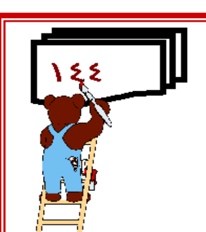
❷ $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ١) + ك (١ ، ١) ، ٢ س − ص − ٣ = ٠

❸ ص − $\sqrt{3}$ س − ٥ = ٠ ، س − $\sqrt{3}$ ص − ٦ = ٠

[٦] إذا كانت هـ هى قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

س − ٦ ص + ٦ = ٠ ، أ س − ٢ ص + ٤ = ٠ وكانت ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$ فأوجد قيمة أ .

[٧] أوجد قياس الزاوية بين المستقيم ٣ س − ٢ ص = ٩ ، المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٢) ، (− ٤ ، − ١)



[٨] أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين ص = ٣ ، س + ص = ٧

[٩] أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين س = ٦ ، س + ٤ص = ٧

[١٠] أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

❶ $\overleftarrow{ر_1}$ = (٠ ، –٢) + ك (٣ ، –١) ، $\overleftarrow{ر_2}$ = (٠ ، ٥) + ك (١ ، ٢) .

❷ س + ٢ص = ٠ ، ٣س – ٥ص = ١

[١١] أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

س + ٢ص + ٣ = ٠ ، س – ٣ص + ١ = ٠

[١٢] أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : ٢ص = ٣ ، ٢س + ص = ٤

[١٣] أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين ص = $\frac{1}{2}$ س + ٥ ، س + ٣ص + ١ = ٠

[١٤] أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $\frac{س}{٢}$ + $\frac{ص}{٥}$ = ١ ، ص = $\frac{٣}{٤}$ س – ٧

[١٥] أوجد قياس الزاوية بين المستقيم ٣س – ٢ص = ٩

، المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٢) ، (–٤ ، –١)

[١٦] أوجد قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيمين

$\overleftarrow{ر_1}$ = (٢ ، ٠) + ك (–٢ ، ١) ، $\overleftarrow{ر_2}$ = (–٣ ، ١) + ك (٦ ، ٣) .

[١٧] أوجد قياس الزاوية بين المستقيم س – ٢ص – ٧ = ٠ ، محور السينات

[١٨] أوجد قياس الزاوية بين المستقيم س + ص – ١ = ٠ ، محور الصادات

[١٩] أوجد قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيم س − ٢ ص + ٣ =

، والمستقيم المار بالنقطتين (٤ ، − ١) ، (٢ ، ١) .

[٢٠] إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : ٣ س + ص − ٨ = ٠

، ك س − ص + ٩ = ٠ يساوى ط/٤ فما قيمة ك ؟

[٢١] أوجد قيمة أ التى تجعل الزاوية بين المستقيمين : س − ص − ٣ = ٠

، أ س − ٢ ص + ٣ = ٠ ظلها ٣/٤

[٢٢] إذا كان قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : س + ك ص − ٨ = ٠ ،

٢ س − ص − ٥ = ٠ يساوى $\frac{\pi}{4}$ فأوجد قيمة ك .

[٢٣] أوجد قيمة أ التى تجعل الزاوية الحادة بين المستقيمين ٣ س − ٥ ص − ٨ = ٠

، ص = س يساوى الزاوية الحادة بين المستقيمين س − ٢ ص = ٥ ، ٢ س + أ ص = ٧

[٢٤] أوجد قيمة أ التى تجعل المستقيمين ٤ أ س − ٩ ص = ٧ ، أ س + ٤ ص = ١

متعامدان

[٢٥] إذا كان ظل الزاوية بين المستقيم الذى ميله − ٢ والمستقيم الذى معادلته

س + أ ص + ١ = ٠ يساوى ٣/٤ أوجد قيمة ك :

[٢٦] إذا كانت هـ هو قياس الزاوية بين المستقيمين : س − ص + ٦ = ٠

، أ س − ٢ ص + ٤ = ٠ حيث جتا هـ = ٤/٥ احسب قيمة أ

✍ [٢٧] **إذا كان ظل قياس الزاوية بين المستقيمين :** أ ص + س = ٠ ، ٢س + ص = ١

يساوى $\frac{٣}{٤}$ **احسب قيمة** أ

✍ [٢٨] **إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين :** ٣س − ٥ص = ٩ ، أ س − ص = ٧

يساوى ٤٥° **احسب قيمة** أ

✍ [٢٩] **اثبت أن الزاوية بين المستقيمين :** ص = $\frac{١ + ب}{١ − ب}$ س + ٦ ، ص − ب س + ١ = ٠

قياسها ثابت لجميع قيم ب ≠ ١ **وأوجد قياس هذه الزاوية**

✍ [٣٠] **إذا كان قياس الزاوية بين المستقيم** $ل_١$: أ س − ١١ص − ٨ = ٠ ، **والمستقيم** $ل_٢$: ٤س + ٣ص = ١ **تساوى قياس الزاوية بين المستقيم** $ل_٢$ ، **والمستقيم** $ل_٣$: ٣س − ص + ٢ = ٠ **أوجد قيمة** أ

✍ [٣١] **مستقيمان ميلاهما** م ، $\frac{٢}{٣}$ م **وجيب الزاوية بينهما يساوى** $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$ **أوجد**

معادلة المستقيم الذى ميله م **ويمر بالنقطة** (٢ ، ٣) **حيث** م > ٠

✍ [٣٢] **مستقيمان ميليهما** م ، $\frac{٣}{٨}$ م **وظل قياس الزاوية بينهما** $\frac{٥}{١١}$ **ويمران بالنقطة**

(٣ ، −١) **أوجد معادلتيهما علما بأن** م > ٠

✍ [٣٤] **أوجد معادلة المستقيمين المارين بالنقطتين (١ ، ٢) ويصنع كلا منهما زاوية**

قياسها ٤٥° **مع المستقيم** س − ٢ص + ٣ = ٠

[٣٥] أوجد معادلة المستقيمين المارين بالنقطتين (٢ ، — ٣) ويصنع كلا منهما

زاوية ظلها $\frac{١}{٢}$ مع المستقيم س + ص + ٥ = ٠

[٣٦] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، — ١) ويصنع مع المستقيم

س + ص + ٢ = ٠ زاوية قياسها $\frac{ط}{٤}$

[٣٧] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (— ١ ، ١) ويصنع مع المستقيم

٥س + ص + ٣ = ٠ زاوية جيب تمامها $\frac{١}{\sqrt{٥}}$

[٣٨] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ ، ١) ويصنع مع المستقيم الذى

معادلته ٣س — ص = ٤ زاوية ظلها $\frac{١}{٢}$

[٣٩] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (— ١ ، ٣) ويصنع مع المستقيم الذى

معادلته س + ٢ص + ٦ = ٠ زاوية ظلها $\frac{١}{٧}$

[٤٠] 📖 أثبت أن △ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب حيث أ (٥ ، ٢)

، ب (٢ ، — ٢) ، جـ (— ٢ ، ١) ثم احسب مساحة سطحه .

[٤١] 📖 أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ

إذا كان أ (٢ ، ٣) ، ب (— ١ ، ٣) ، جـ (٢ ، ٥)

[٤٢] 📖 هل المثلث الذى رؤوسه النقط أ (٢ ، ٣) ، ب (٧ ، ٨) ، جـ (— ١ ، ٣)

فيه زاوية أ ب جـ حادة أم منفرجة ؟ وأوجد قياسها .

[٤٣] أ ب جـ Δ فيه : أ (٠ ، ٢) ، ب (٣ ، ١) ، جـ (−٢ ، −١)
أوجد قياس زاوية أ

[٤٤] إذا كان المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب حيث أ (٢ ، ٣) ، ب (٥ ، ٧)
، جـ (١ ، ص) ، فأوجد قيمة ص ثم أوجد قياس كل من الزاويتين الأخريين .

[٤٥] أ ب جـ مثلث فيه أ (٢ ، ٣) ، ب (٤ ، ٤) ، جـ (−١ ، ٤)
حدد نوع زاوية أ وأوجد قياسها

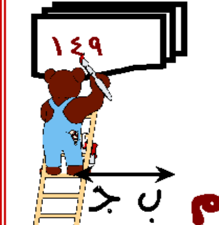
[٤٦] أ ، ب ، جـ هى النقط (٩ ، ٠) ، (٢ ، ١) ، (−٢ ، −٢) على الترتيب
أوجد قياس الزاوية أ ب جـ

[٤٧] أ ، ب ، جـ هى النقط (٤ ، −١) ، (−١ ، ٠) (٢ ، ١) على الترتيب
أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ

[٤٨] المثلث أ ب جـ فيه أ (٥ ، ٧) ، ب (١ ، ٥) ، جـ (٤ ، ٢)
① أوجد إحداثى نقطة ء التى تقسم $\overline{\text{ب جـ}}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢ .
② أثبت أن : $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$
③ أثبت أن : أ ء = ب جـ
④ أوجد : ق (∠ ب)
⑤ أوجد مساحة سطح المثلث أ ب جـ

[٤٩] أ ب جـ مثلث رؤوسه أ (−٣ ، ٢) ، ب (−٣ ، −١٣) ، جـ (٥ ، ٣) ،
نصفت $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ء أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

[٥٠] أ ب جـ مثلث فيه أ (−٦ ، ٢) ، ب (٤ ، ٧) ، جـ (٩ ، ٤) ، ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث
أ ء : ء ب = ٢ : ٣ أوجد إحداثى نقطة ء ثم أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$



[٥١] أ ب جـ مثلث فيه أ (٢ ، ١) ، ب (٢ ، –٣) ، جـ (–٢ ، –٣)

❶ اثبت أن △ أ ب جـ قائم الزاوية ❷ أوجد معادلة المستقيم ب جـ

❸ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $\overleftrightarrow{أجـ}$ ، $\overleftrightarrow{بجـ}$

[٥٢] أ ب جـ ء متوازى أضلاع رؤوسه أ (١ ، ٣) ، ب (٣ ، –٢) ، جـ (٦ ، ١)

أوجد إحداثى نقطة ء ثم أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $\overleftrightarrow{أجـ}$ ، $\overleftrightarrow{بء}$

[٥٣] اثبت أن : النقط أ (٥ ، ٢) ، ب (١ ، ٥) ، ب (–٢ ، ١) ، ء (٢ ، –٢) هى رؤوس شكل رباعى دائرى .

[٥٤] أ (٤ ، ١١) ، ب (٢,٥ ، –٧) ، جـ (–٩,٥ ، –١) اثبت أن :

المستقيم س + ٢ص = ٣ يصنع مع المستقيمين $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مثلثا متساوى الساقين

[٥٥] إذا كان الخط المستقيم ل يصنع زاوية جيب تمامها يساوى $\frac{٣\sqrt{١٠}}{١٠}$ مع

المستقيم ٣ س – ص + ٥ = ٠ فما هو ميل الخط المستقيم ل ثم أوجد معادلة الخط

المستقيم ل إذا كان يمر بالنقطة (١ ، –٢)

[٥٦] فى الشكل المقابل :



معادلة $ل_١$ هى : س + ٧ص = ٧ ،

معادلة $ل_٢$ هى : ٣س – ٤ص = ٠

أوجد قياس الزاوية المنفرجة ى ثم أوجد إحداثيات النقطتين أ ، ب

تمارين (٩) على طول العمود المرسوم من نقطة إلى مستقيم معلوم .

[١] أكمل كلا مما يأتي بالإجابة الصحيحة :

١ طول العمود الساقط من النقطة (٣ ، ٥) على المستقيم س = — ٤ يساوى ....

٢ طول العمود الساقط من النقطة (٢ ، —٦) على المستقيم ص = ٤ يساوى ....

٣ طول العمود الساقط من النقطة (٢ ، ١) على المستقيم س — ٢ص = ٠ يساوى ....

٤ البعد بين المستقيمين : ص — ٣ = ٠ ، ص + ٢ = ٠ يساوى ....

٥ طول العمود المرسوم من النقطة (— ١ ، — ٦) إلى محور الصادات يساوى ....

٦ طول العمود المرسوم من النقطة (٠ ، ١)إلى المستقيم : ٣س + ٤ص = ١٢ يساوى.......

٧ طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، — ٥) إلى المستقيم : ر = ك (٣ ، ٤)يساوى.......

٨ طول العمود المرسوم من النقطة (٠ ، ٥) إلى الخط المستقيم س + ٧ = ٠يساوى ....

٩ طول العمود المرسوم من نقطة الأصل إلى المستقيم : ر = (٥ ، ٠) + ك (٤ ، ٣)يساوى......

١٠ طول العمود النازل من النقطة (٢ ، ٥) على محور السينات يساوى ....

١١ البعد العمودى بين المستقيمين ص = ٥ ، ص = ٢ يساوى ....

١٢ طول العمود المرسوم من نقطة الأصل إلى المستقيم ٣س+٤ص+١٠ = ٠ يساوى ......

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ طول العمود المرسوم من النقطة (— ٣ ، ٥) إلى محور الصادات يساوى ......

(١) ٢ (٢) ٣ (٣) ٥ (٤) ٨

٢ البعد بين المستقيمين : ص — ٣ = ٠ ، ص + ٢ = ٠ يساوى ......

(١) ١ (٢) ٢ (٣) ٣ (٤) ٥

٣ طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ١) إلى المستقيم : س + ص = ٠ يساوى......

(١) ١ (٢) $\sqrt{٢}$ (٣) ٢ (٤) ٢$\sqrt{٢}$

٣ إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ١) إلى المستقيم : ٣س — ٤ص + جـ = ٠ يساوى ٢ وحدة طول فان جـ تساوى ....

(١) صفر (٢) ٣ (٣) ٥ (٤) ٧

[٣] أوجد طول العمود المرسوم من النقطة أ إلى المستقيم ل في التمارين من ① إلى ④

① أ (٠ ، ٠) ، ل : ر = (٠ ، ٥) + ك (٣ ، ٤)

② أ (٢ ، −٤) ، ل : ١٢ س + ٥ ص − ٤٢ = ٠

③ أ (٥ ، ٢) ، ل : ٨ س + ١٥ ص − ١٩ = ٠

④ أ (−٢ ، −١) ، ل : ر = (٠ ، −٧) + ك (١ ، ٢)

[٤] أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، −٥) إلى المستقيم :

ر = (−١ ، ٠) + ك (١٢ ، ٥) .

[٥] اكتب طول العمود المرسوم من النقطة أ إلى المستقيم ل في الحالات التالية :

① أ (٠ ، ٠) ، ل : أ س + ب ص + جـ = ٠

② أ (س١ ، ص١) ، ل : ص = ٠ ③ أ (س١ ، ص١) ، ل : س = ٠

[٦] أوجد طول العمود الساقط من النقطة (٣ ، ٢) على المستقيم ٤ س − ٣ ص + ٨ = ٠

[٧] أوجد طول العمود الساقط من النقطة (−١ ، ٥) على المستقيم

س = ٢ + ٥ ك ، ص = ٧ − ١٢ ك

[٨] أوجد طول العمود الساقط من النقطة (−٢ ، −١) على المستقيم

ل : ر = (−٢ ، ٠) + ك (٤ ، ٣)

[٩] أوجد طول العمود الساقط من النقطة (٤ ، −١) على المستقيم المار

بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (٥ ، ٠)

[١٠] أوجد طول العمود الساقط من النقطة أ (٢ ، ٠) على المستقيم

ب جـ حيث ب (٢ ، ٩) ، جـ (١ ، −٢)

[١١] أوجد طول العمود الساقط من النقطة أ منتصف ب جـ حيث ب (١ ، ٤)

، جـ (−٣ ، ٦) على المستقيم : ٣ س + ٤ ص − ٥ = ٠

[١٢] أوجد طول العمود الساقط من النقطة جـ التى تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣ حيث أ (٢ ، −١) ، ب (−٣ ، −٤) على المستقيم : ٥س − ١٢ص = ٠

[١٣] أوجد طول العمود الساقط من النقطة جـ حيث جـ ∈ $\overleftarrow{أب}$ ، جـ ∉ $\overline{أب}$ ، أ (٢ ، ٠) ، ب (−٤ ، ١) على المستقيم : س + ص − ٣ = ٠

[١٤] أوجد محيط الدائرة التى مركزها م (٣ ، −١) وتمس المستقيم الذى معادلته : ٤س − ٣ص + ٧ = ٠

[١٥] أوجد مساحة الدائرة التى مركزها (٢ ، −١) وتمس المستقيم : ٥س + ١٢ص − ٤١ = ٠

[١٦] أوجد طول نصف قطر الدائرة التى مركزها النقطة (− ٢ ، ٥) ، تمس المستقيم : ٣ س + ٤ ص + ١ = ٠

[١٧] اثبت أن النقطتين (١ ، ١) ، (−٢ ، ٣) تقعان على جانبين مختلفين من الخط المستقيم ٢س − ص + ٣ = ٠ وعلى بعدين متساويين منه .

[١٨] هل النقطتان (١ ، ٤) ، (−٢ ، ٣) تقعان على نفس الجانب من الخط المستقيم : ٢س − ص + ٣ = ٠ أم على جانبين مختلفين ؟

[١٩] اثبت أن النقطة (١١ ، ٨) هى مركز الدائرة الداخلة للمثلث الذى معادلات المستقيمات الحاملة لأضلاعه هى :

ص = ٢٠ ، ٣س + ٤ص − ٥ = ٠ ، ٥س + ١٢ص + ٥ = ٠

[٢٠] دائرة مركزها نقطة الأصل فيها وتران معادلتيهما : ٤ س − ٣ ص + ١٠ = ٠ ، ٥ س − ١٢ص + ٢٦ = ٠ اثبت أن : الوترين متساويان فى الطول .

[٢١] اثبت أن : المستقيمان ل$_١$: ٣س + ٤ص − ٧ = ٠

، ل$_٢$: ٦س + ٨ص + ٥ = ٠ متوازيان ثم أوجد البعد بينهما

[٢٢] اثبت أن : المستقيمان ل$_١$: س + ٢ص − ١ = ٠

، ل$_٢$: ٢س + ٤ص + ١ = ٠ متوازيان ثم أوجد البعد بينهما

[٢٣] طريقان متجاوران مسار الطريق الأول تمثله المعادلة :

٣س − ٤ص − ٧ = ٠ ومسار الطريق الثاني تمثله المعادلة : ٣س − ٤ص + ١١ = ٠

أثبت أن : الطريقين متوازيان ، ثم أوجد أقصر بعد بينهما .

[٢٤] أوجد نقطة على محور السينات بحيث يكون بعدها عن المستقيم :

١٢س + ٥ص + ٩ = ٠ مساويا ٣

[٢٥] إذا كان طول العمود الساقط من النقطة (١ ، جـ) على الخط المستقيم :

٢س + ٣ص + ٥ = ٠ يساوي $\sqrt{١٣}$ أوجد قيمة جـ

[٢٦] إذا كان طول العمود النازل من النقطة (٢ ، ١) على المستقيم :

أ س + ٤ص = ٠ يساوي ٢ أوجد قيمة أ

[٢٧] إذا كان طول العمود الساقط من النقطة (١ ، ٢) على المستقيم :

٣س + ب ص + ١٩ = ٠ يساوي ٢$\sqrt{١٣}$ أوجد قيمة ب

[٢٨] إذا كانت النقطتان (١ ، ٢) ، (٧ ، −١) تقعان على بعدين متساويين

من المستقيم ٣س + ٤ص + حـ = ٠ فما قيمة حـ ؟

[٢٩] إذا كان المستقيم الذي يمر بالنقطة (١ ، ١) وميله $\frac{٥}{١٢}$ يمس الدائرة التي

مركزها (٤ ، −١) أوجد طول نصف قطر الدائرة .

[٣٠] أوجد بعد النقطة (١ ، −٢) عن الخط المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −٣) والذى يصنع زوايا متساوية مع كل من محورى الإحداثيات .

[٣١] اثبت أن النقطتين أ (−٣ ، ٥) ، ب (٧ ، −١) على أبعاد متساوية من المستقيم : ٢ س + ص − ٦ = ٠ وفى جهتين مختلفتين منه .

[٣٢] إذا كانت : ء (−٢ ، ٣) ، هـ (١ ، ٧) ، ل : ٤ س − ٣ ص − ٣ = ٠

اثبت أن : ء ، هـ تقعان فى جهة واحدة من المستقيم ل وعلى بعدين متساويين منه

[٣٣] إذا كانت أ (١ ، ١) ، ب (−٢ ، ٣) ، ل : ٢ س − ص + ٣ = ٠

اثبت أن : أ ، ب تقع على جانبين مختلفين من المستقيم ل وعلى بعدين متساويين منه

[٣٤] إذا كانت : أ (٤ ، ٣) ، ب (−٢ ، ٥) ، جـ (−١ ، −٢)

هى رؤوس مثلث أ ب جـ ، رسم $\overline{\text{ب ء}}$ ⊥ أ جـ .

① اثبت أن : △ أ ب جـ متساوى الساقين

② أوجد معادلة $\overline{\text{ب ء}}$

③ أوجد طول $\overline{\text{ب ء}}$

[٣٥] أ ب جـ مثلث فيه أ (−٤ ، ١) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (−٢ ، ٦) أوجد

❶ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

❷ طول العمود الساقط من النقطة أ على المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

❸ مساحة المثلث أ ب جـ

[٣٦] أوجد معادلة المستقيم الذى ميله $\frac{٣}{٤}$ وطول العمود الساقط عليه من النقطة (١ ، ٢) يساوى ٥ وحدات طول

✍ [٣٧] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −٤) وطول العمود الساقط عليه من نقطة الأصل يساوى ٢ وحدة طول .

✍ [٣٨] مستقيم طول العمود النازل من النقطة (٢ ، ٥) عليه يساوى ٣ وحدات طول وميله $\frac{٤}{٣}$ أوجد معادلة هذا المستقيم

✍ [٣٩] أوجد معادلة المستقيم الذى ميله $\frac{-٥}{١٢}$ وطول العمود الساقط عليه من النقطة (٢ ، −١) يساوى ٢ وحدة طول

✍ [٤٠] أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، −٤) وطول العمود الساقط عليه من نقطة الأصل ٢ وحدة طول وبين أن هناك مستقيمين يحقق هذه الشروط

✍ [٤١] أوجد بعد النقطة (١ ، −٢) عن المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −٣) والذى يصنع زوايا متساوية مع الاتجاهين الموجب لمحور السينات والسالب لمحور الصادات

✍ [٤٢] اثبت أن المستقيمين س − ٤ص + ١٤ = ٠ ، ٤س + ص + ٥ = ٠ متقاطعين على التعامد ثم أوجد نقطة تقاطعهما وكذلك معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطعهما وبالنقطة (٢ ، ١) .

✍ [٤٣] اثبت أن النقطة (٤ ، ٦) تقع على أحد منصفى الزاوية بين المستقيمين :

س − ٣ص + ٤ = ٠ ، ٩س − ١٣ص − ٨ = ٠

✍ [٤٤] اثبت أن النقطة (١ ، ٤) تقع على أحد منصفى الزاوية بين مستقيمين

س + ص + ٣ = ٠ ، س − ٧ص − ١٣ = ٠

[٤٥] إذا كان المستقيمان $ل_١$: ٣ س + ٤ ص = ١٢ ، $ل_٢$: أ س + ٨ ص + جـ =
متوازيان والبعد بينهما ٣ وحدات طول أوجد قيمة كلا من أ ، جـ

[٤٦] أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، فإذا كانت : أ (−٣ ، ٢) ، ب (٢ ، ٣) ،
جـ (٥ ، ٧) أوجد إحداثيى الرأس ء ، ثم أوجد مساحة متوازى الأضلاع .

[٤٧] أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه أ (٢ ، ١) ، ب (٥ ، ٣) ، (٤ ، ٧) أوجد إحداثى
النقطة ء ❷ مساحة سطح متوازى الأضلاع أ ب جـ ء

[٤٨] أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه أ (٠ ، ٠) ، ب (٤ ، ٥) ، جـ (٣ ، ١) ، م
نقطة تقاطع قطريه أوجد

❶ إحداثيات النقطتين م ، ء
❷ طول $\overline{\text{ب جـ}}$
❸ ميل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$
❹ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$
❺ طول العمود الساقط من أ على المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$
❻ مساحة سطح متوازى الأضلاع أ ب جـ ء

[٤٩] أ ب جـ ء شكل رباعى فيه أ (٢ ، ٣) ، ب (٦ ، ٢) ، جـ (−٢ ، −٢)
ء (−٢ ، ١) اثبت أن : الشكل أ ب جـ ء شبه منحرف وأوجد مساحة سطحه .

[٥٠] أ ب جـ ء شكل رباعى فيه أ (−١ ، ٤) ، ب (٣ ، −٢) ، جـ (١ ، −٣) ، ء (−
٥ ، ١) اثبت أن أ ب جـ ء متوازى أضلاع ثم أوجد

❶ طول $\overline{\text{ب جـ}}$
❷ معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$
❸ طول العمود الساقط من أ على $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$
❹ مساحة سطح متوازى الأضلاع أ ب جـ ء

✍ [٥١] **اثبت أن النقط :** م (٢ ، ٣) ، ب (٦ ، ٢) ، جـ (−٢ ، −٢) ، ء (−٣ ، ١)

هى رؤوس شبه منحرف وأوجد مساحته

✍ [٥٢] م ب جـ ء **شبه منحرف فيه :** م ء ⃡ // ب جـ ⃡ ، **فإذا كانت :** م (٢ ، ١)

، ب (٥ ، ٣) ، جـ (٦ ، ١) ، ء (٤ ، ص) .

أوجد قيمة ص ، **ثم أوجد مساحة شبه المنحرف** م ب جـ ء

✍ [٥٣] **الشكل المقابل :**

يبين منزل كريم م (٢ ، ٠) **و المدرسة** ب (٧ ، ٠) **والمسجد** جـ (٤ ، ٦)

أوجد

① معادلة المستقيم م ب ⃡ ② طول م ب

③ أقصر بعد من المسجد جـ إلى الطريق الواصل بين المنزل والمدرسة

④ قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيمين م جـ ⃡ ، ص = ٠

⑤ مـ (△ م ب جـ)

تمارين على

[١] أكمل كلا مما يأتى بالإجابة الصحيحة :

١ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س = ٣ ، ص = ٥ ، ونقطة الأصل هى ......

٢ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س = ١ ، س + ص = ٤ وميله ٣ هى ....

٣ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س + ص = ٢ ، س = ص ويوازى محور السينات هى ......

٤ معادلة المستقيم الذى يمر (٣ ، ٠) وبنقطة تقاطع المستقيمين س = ٣ ، ص = ١ هى ....

٥ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

س = ص ، ص = ٢ ، يوازى المستقيم ى = ك (٣ ، ١) هى ....

٦ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

س − ص = ١ ، س + ص = ٣ ، و يوازى المستقيم ص = ٥ هى ....

٧ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ى١ = ك (١ ، ٦) ، ى٢ = ك (٥ ، ٨)

، والذى يقطع من محور الصادات الموجب جزءا قدره ٥ وحدات هى ....

٨ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س − ص = ٠ ، ى = ك (٧ ، −٢)

ويمر بالنقطة (٠ ، ١) هى ....

٩ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س = ٧ ، ص + ٤ = ١ ويوازى محور الصادات.......

[٢] أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بنقطة الأصل وبنقطة تقاطع المستقيمين : س = ٣ ، ص = ٤ .

[٣] أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٣ ، ١) وبنقطة تقاطع المستقيمين : ٣ س + ٢ ص − ٧ = ٠

[٤] أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

س + ٢ص = ٣ ، ٢ س + ص = ٣ ويمر بالنقطة (١ ، −٢)

[٥] أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة أ (٢ ، – ١) وبنقطة تقاطع المستقيمين : ٧ س + ص + ٣ = ٠ ، ٥ س – ص – ٣ = ٠

[٦] أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :
٥س + ص = ٤ ، ٤س + ٣ص – ١ = ٠ ونقطة الأصل

[٧] أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢س + ٥ص + ٣ = ٠
، ٣س + ص = ٢ ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ١٣٥°

[٨] أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢س + ٣ص – ٢ = ٠
، ٣س – ص – ١٤ = ٠ والذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور الصادات زاوية قياسها ١٣٥° .

[٩] أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :
ر = ك (–٣ ، ٢) ، ٣ س – ٢ ص = ١٣ ويوازى محور الصادات .

[١٠] أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢ س + ص = ٥
، س + ٥ ص = ١٦ وعمودى على المستقيم س – ص = ٨

[١١] أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢س – ٧ص + ٩ = ٠
، ٣ س + ٢ ص – ٤ = ٠ والذى يكون عموديا على المستقيم الأول .

[١٢] أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :
ل١ : ر = (٣ ، –٢) + ك (٠ ، ١) ، ل٢ : (س ، ص) = (–٢ ، ٣) + ق (١ ، –٤)

والنقطة (٣ ، ٣) تبعد عنه بمقدار $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ وحدة طول

[١٣] أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :
س + ص = ٣ ، ٢س – ص = ٣ ويمر بالنقطة (٣ ، ٠)

[١٤] أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

س − ٣ص + ٥ = ٠ ، ٢س − ص − ٤ = ٠ ويكون موازيا للمستقيم س − ٢ص + ١ = ٠

[١٥] أثبت أن المستقيمين : س − ٤ص + ١٤ = ٠ ، ٤س + ص + ٥ = ٠ متعامدان

ثم أوجد نقطة تقاطعهما ومعادلة الخط المستقيم المار بنقطة تقاطعهما والنقطة (٢ ، ١)

[١٦] أثبت أن المستقيمين : س − ٤ص + ١٤ = ٠ ، ر = (−٢ ، ٣) + ك (١ ، −٤)

متقاطعان على التعامد ، ثم أوجد : نقطة تقاطعهما .

ثم أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بنقطة التقاطع والنقطة (٢ ، ١)

[١٧] أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

س + ٢ص = ٨ ، ٣س + ص = ٦ ويكون عموديا على المستقيم الأول

[١٨] أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٥س − ص = ٥

، س + ٢ص = ١ ويكون عموديا على المستقيم الثانى

[١٩] أثبت أن المستقيمين : س − ٤ص + ١٤ = ٠ ، ٤س + ص + ٥ = ٠ متعامدان

ثم أوجد نقطة تقاطعهما ومعادلة المستقيم المار بنقطة التقاطع و النقطة (٢ ، ١)

[٢٠] أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢س + ص = ١

، س − ص + ٣ = ٠ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات جزء طوله ٣ وحدات

[٢١] أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

ل١ : س + ص = ٢ ، ل٢ : $\frac{س - ٢}{٢} = \frac{٢ - ص}{٣}$ ويوازى محور الصادات

[٢٢] أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٥س − ص = ٥

، س + ٢ص = ١ ويقطع من الجزءين الموجبين لمحورى الاحداثيات طولين متساويين

[٢٣] أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٣ س − ٥ ص − ١٣ = ، ٢ ص − ٣ س + ٧ = ٠ ويوازى المستقيم : ٤ س − ٥ ص + ٩ = ٠

[٢٤] أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س + ص = ٤ ، س − ص = ٢ ، طول العمود النازل عليه من نقطة الأصل يساوى وحدة طولية .

[٢٥] أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٣ س − ٢ ص − ١١ = ٠ ، س − ٣ ص + ١ والنقطة (−٢ ، ١) تبعد عنه بمقدار ٥ $\sqrt{٢}$ وحدة طول

[٢٦] اوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل ويصنع زاوية مع محور السينات قياسها ضعف قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم : ص = ٠,٢ س مع محور السينات

[٢٧] إذا كانت : أ (١ ، ١) ، ب (٧ ، ٤) ، ء (٢ ، ٧) ثلاثة رؤوس فى الشكل الرباعى الدائرى أ ب جـ ء الذى فيه : ق (∠ ب) = ٩٠° أوجد
❶ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ❷ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ ❸ احداثى نقطة جـ

[٢٨] إذا كانت: أ (٣ ، ٥) ، ب (١١ ، ١١) نقطتان ثابتتان فأوجد النقطة أوالنقط جـ التى تنتمى لمحور السينات بحيث تكون مساحة المثلث أ ب جـ تساوى ٣٠ وحدة مربعة

[٢٩] إذا كانت النقطة ب هى مسقط النقطة أ (٥ ، ٧) على المستقيم ل : س + ٢ ص − ٤ = ٠ أوجد إحداثى النقطة ب

[٣٠] إذا كانت : أ (١ ، ٠) ، ب (٣ ، ٠) ، جـ (٣ ، ٥) ، ء (١ ، ٤) هى رؤوس شبه منحرف أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل ويقسمه الى نصفين متساويين فى المساحة .

[٣١] أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل ونقطة تقاطع المستقيمين :

$$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١ \quad ، \quad \frac{س}{ب} + \frac{ص}{أ} = ١$$

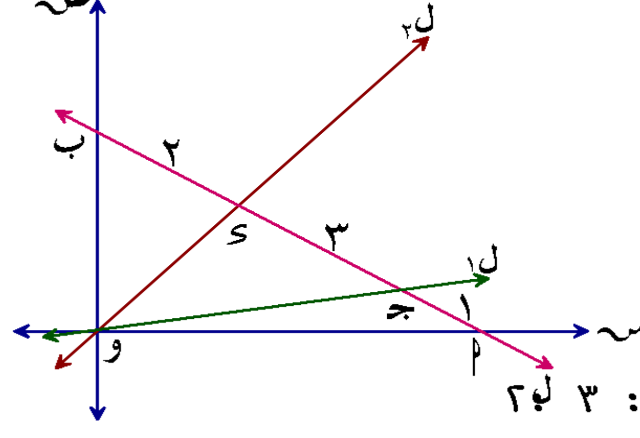
[٣٢] إذا كان و أ ب جـ شكل رباعى قطراه متعامدان ومتقاطعان فى النقطة هـ بحيث ب هـ = و هـ فإذا كانت إحداثيات و(٠ ، ٠) ، أ(٧ ، ل) ، ب(٥ ، ٣) ، جـ(ك ، ك + ٣)

حيث ل ، ك ثابتان أوجد :

❶ احداثى نقطة هـ ❷ معادلة $\overleftrightarrow{أجـ}$ ❸ قيم ل

❹ إحداثى نقطة جـ ❺ النسبة التى تقسم بها ؎ القطعة المستقيمة $\overline{أهـ}$

[٣٣] فى الشكل المقابل :



المستقيم : ل : س + ٣ص − ٩ = ٠

يقطع محورى الإحداثيات فى النقطتين أ ، ب

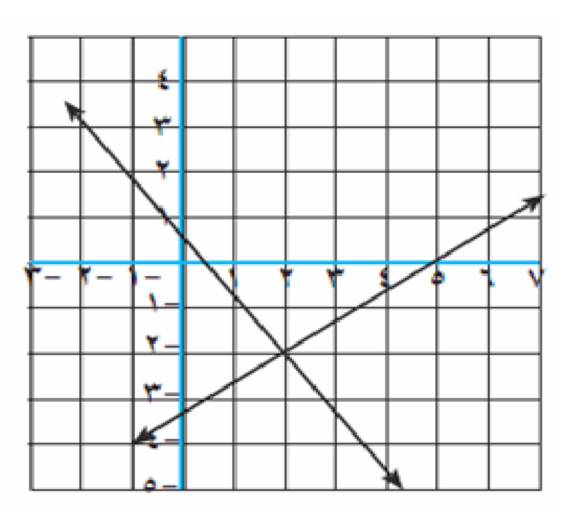
، المستقيمان $ل_١$ ، $ل_٢$ يقطعان المستقيم ل

فى النقطتين جـ ، ء على الترتيب

بحيث تكون النسبة بين أ جـ : جـ ء : ء ب = ١ : ٣ : ٢

أوجد ق(∠ جـ و ء) ثم أوجد معادلة كل من $ل_١$ ، $ل_٢$

[٣٤] طريقان مستقيمان :



معادلة مسار الأول : ٣ س − ٤ ص − ١٤ = ٠

، معادلة مسار الثانى ٤ س + ٣ ص − ٢ = ٠

أثبت أن الطريقين متعامدان ، ثم أوجد :

(١) نقطة تقاطعهما .

(٢) معادلة المستقيم المار بنقطة التقاطع و النقطة (٣ ، − ٢)

[٣٥] إذا كان : ل١ : ٣س + ٢ص − ٧ = ٠

، ل٢ : ر = (−٢ ، ٠) + ك (٣ ، ٢) **أوجد :**

① المعادلة الكارتيزية للمستقيم ل٢

② قياس الزاوية بين المستقيمان ل١ ، ل٢

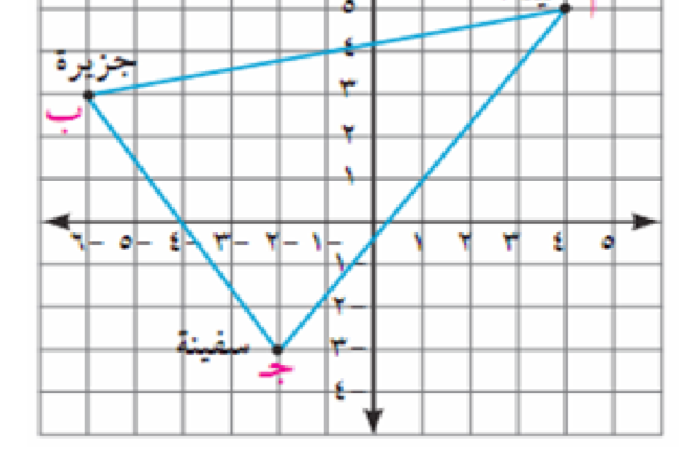
③ نقطة تقاطع المستقيمان ل١ ، ل٢ .

④ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين والنقطة (٣ ، ٤)

⑤ طول العمود المرسوم من نقطة تقاطع المستقيمين الى الخط المستقيم الذى معادلته :

٣ س − ٤ ص − ٩ = ٠

⑥ مساحة سطح المثلث المحدد بالمستقيمين ل١ ، ل٢ ومحور السينات .



[٣٦] يبين الشكل المقابل :

شبكة تربيعية مقسمة بالميل البحرى ، مبين عليها إحداثيات كل من :

الميناء أ (٤ ، ٥) **والجزيرة** ب (−٦ ، ٣)

والسفينة ج (−٢ ، −٣) . **أوجد**

① المسافة بالميل البحرى بين الميناء والسفينة .


② الزمن الذى استغرقته السفينة فى قطع المسافة أب إذا كانت سرعته ٢٠ عقدة .

③ النسبة التى تنقسم بها بج بمحور السينات ، ثم أوجد إحداثيا نقطة التقسيم .

④ معادلة مسار السفينة إذا كانت تتحرك فى خط مستقيم .

⑤ أقصر مسافة بين الجزيرة والسفينة .

⑥ قياس الزاوية المحصورة بين أب ، أج .

⑦ مساحة سطح المثلث أ ب ج .

أولا الجبر وحساب المثلثات



المصفوفات

الدرس الأول

أختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

① إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ٠ & ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن أ١٢ + أ٢١ = ...

صفر	١	٢	٣

---

② إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٤ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن أ١٣ + أ٢١ = ...

٢	٣	٥	٨

---

③ إذا كان أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ فإن عدد عناصر أ = ...

٢	٣	٥	٦

---

④ إذا كان أ مصفوفة مربعة وكان عدد الصفوف يساوي ٣ فإن عدد الأعمدة يساوي ....

١	٢	٣	٤

---

⑤ المصفوفة ....هي مصفوفة جميع عناصرها أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي فيكون أحدهماعلى الأقل مغيراً للصفر .

الصفرية	القطرية	الوحدة	المربعة

---

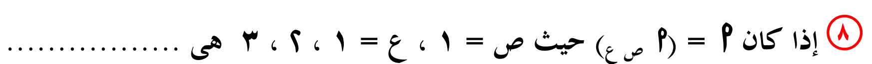
⑥ إذا كانت ج = (حـ ص ع)على النظم ٣ × ٣ بحيث حـ ص ع = ٣ ص + ٢ ع فإن حـ ١١ =.....

١	٣	٥	٧

---

⑦ إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٣ ، ب مصفوفة مربعة فإن المصفوفة ب أ تكون على النظم ....

٢ × ٢	٣ × ٣	٣ × ٢	٢ × ٣



⑧ إذا كان أ = $(أ_{ص ع})$ حيث ص = ١ ، ع = ١ ، ٢ ، ٣ هي ....



$\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢٢} & أ_{٣١} \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} أ_{١١} \\ أ_{٢٢} \\ أ_{٣١} \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \end{pmatrix}$

---

⑨ إذا كانت المصفوفة أ على النظم ٢ × ٣ فإن عدد عناصر أ يساوي ....



٢ ، ٣ ، ٦ ، ٩

---

⑩ إذا كانت المصفوفة س = (س هـ ب) على النظم ٢ × ٣ حيث س هـ ب = هـ − ى + ١

فإن $س_{١٢}$ = ...



صفر ، ١ ، ٢ ، ٥

---

⑪ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٢ \\ ٢ & -١ & ١ \end{pmatrix}$ فإن $أ_{١١} + أ_{٢٢}$ = ...

٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

---

⑫ إذا كانت المصفوفة أ على النظم ص × ع وكان عدد عناصر المصفوفة أ يساوي ١٢

حيث عدد الصفوف عدد أولي فإن عدد الأعمدة يمكن أن يكون ....

٣ ، ٤ ، ٤ ، ٦ ، ٢ ، ٦ ، ٣ ، ٦

---

⑬ إذا كان أ = $(أ_{ص ع})$ على النظم ٢ × ٢ حيث $أ_{ص ع}$ = ص + ص ع − $ع^{٢}$ فإن أ = ...

$\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} -١ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} -١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

---

⑭ إذا كان أ = $(أ_{ص ع})$ على النظم ٢ × ٢ حيث :

$أ_{ص ع}$ = { ٢ ص − ع عندما ع > ص ؛ صفر عندما ص = ع ؛ ع + ٣ − $ص^{٢}$ عندما ص > ع }

فإن المصفوفة أ = ...

I ، $I^{مد}$ ، ▭ ، ٢I

⑮ مصفوفة الوحدة هى مصفوفة قطرية يكون فيها كل عناصر القطر الرئيسى مساوية ....

١	٢	صفر	٣

⑯ أي مما يأتي يكفي لإيجاد قيمة المقدار (س + ص + م) حيث أ = $\begin{pmatrix} س & ٢ & ٣ \\ ع & ص & ن \\ ٣ & ٥ & م \end{pmatrix}$

أ = $أ^{مد}$	أ = − $أ^{مد}$	أ مصفوفة قطرية	جميع ما سبق

⑰ $(س^{مد})^{مد}$ + س = ...

٢ س	صفر	س	▭

⑱ إذا كان أ مصفوفة قطرية على النظم ٣ × ٣ وكان $أ_{س ص}$ = ٥ لكل س = ص فإن ......

أ = I	أ = ٥ I	أ = ٥ ▭	أ = ▭

⑲ إذا كانت ▭ المصفوفة الصفرية على النظم ٣ × ٣ فإن عدد عناصر المصفوفة =........

صفر	٣	٩	∅

⑳ إذا كان أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان $أ_{س ص} = \frac{س}{ص}$

فإن $أ_{١١} \times أ_{٢١} \times أ_{١٢} \times أ_{٢٢}$ =..................

٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$

الدرس الثانى: تساوى مصفوفة والمصفوفات المتماثلة وشبه المتماثلة

أختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

① إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ & س + ٤ \\ ١ & ٣ & ٨ \\ -١ & ٨ & ٥ \end{pmatrix}$ مصفوفة متماثلة فإن س =.............

−١	صفر	٥	−٥

② إذا كانت أ مصفوفة شبه متماثلة فإن أ + $أ^{مد}$ =.............

٢ أ	٢ $أ^{مد}$	▭	صفر

الدرس الرابع

ضرب المصفوفات

أختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ١ × ٣ ، ب^{مد} مصفوفة على النظم ١ × ٣ فإنه يمكن إجراء العملية الآتية.....................



أ + ب | ب^{مد} + أ^{مد} | أ ب^{مد} | أ ب

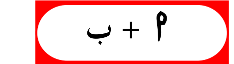
---

(٢) إذا كانت س على النظم ٣ × ٤ ، ص على النظم ٤ × ٣ فإن س × ص على النظم .....

٣ × ٤ | ٤ × ٣ | ٣ × ٣ | ٤ × ٤

---

(٣) إذا كانت المصفوفة أ على النظم ٢ × ١ ، المصفوفة ب على النظم ٣ × ٢ فإنه يمكن إيجاد .....



أ ب | ب أ | أ + ب | أ − ب

---

(٤) إذا كانت س مصفوفة بحيث س × $\begin{pmatrix} ٣ \\ -٤ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٣ \\ -٤ \end{pmatrix}$ فإن س =................

$\begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} ١ & ١ \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

---

(٥) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين حيث أ ب = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٧ \end{pmatrix}$ فإن ب^{مد} أ^{مد} =.............

$\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٧ \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٧ \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} ٧ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} ٧ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$

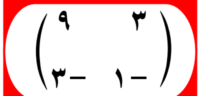
---

(٦) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ \\ -٢ \end{pmatrix}$ ، ب = (٢ ٥) فإن (ب أ)^{مد} =..............

(−٤) | (٤) | $\begin{pmatrix} ٦ & ١٥ \\ -٤ & -١٠ \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} ٦ & -٤ \\ ١٥ & -١٠ \end{pmatrix}$

---

(٧) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٩ & -٣ \end{pmatrix}$ فإن أ^{٢} =............



$\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٩ & -٣ \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} ٣ & ٩ \\ -١ & -٣ \end{pmatrix}$ | O ١×١ | O ٢×٢

⑧ إذا كانت س مصفوفة بحيث س × $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ فإن س يمكن أن تكون ....

- $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} ١ & ١ \end{pmatrix}$

---

⑨ إذا كانت المصفوفة أ على النظم ٣ × ٢ والمصفوفة أ ب على النظم ٣ × ١
فإن المصفوفة ب على النظم ....

- ٢ × ١
- ٣ × ١
- ٣ × ٣
- ٢ × ٣

---

⑩ إذا كانت أ ، ب مصفوفتين حيث : أ ب = $\begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ فإن بمد أمد =..........

- $\begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & -١ \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -١ & ٥ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -١ & ٥ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$

---

⑪ إذا كانت $\begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -١ & ١ \\ س & -٣ \end{pmatrix} = I$ فإن س =...............

- ٤
- ٥
- ١
- غير ذلك

---

⑫ إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، بمد مصفوفة على النظم ٢ × ٣
فإنه يمكن إجراء العملية الآتية ....

- أ + ب
- بمد + أمد
- أ بمد
- أ ب

---

⑬ إذا كان أ ، ب مصفوفتين وكان أ ب معرف فإن (أ ب)مد =.............

- أمد بمد
- بمد أمد
- أ ب
- ب أ

---

⑭ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$ فإن أ² − ٥ أ + ٢ I = ...

- $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} ٤ & ٦ \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} ٤ \\ ٦ \end{pmatrix}$
- ▭

---

⑮ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}$ فإن أ² =................

- أ
- ٢ أ
- ٣ أ
- I

(٣١) إذا كان أ ، ب مصفوفتين حيث أ ب = $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن $ب^{مد}$ $أ^{مد}$ = ...

$\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ٥ & -١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$

---

(٣٢) إذا كانت كل من أ ، ب مصفوفة متماثلة فإن المصفوفة (أ ب أ) تكون ....

متماثلة	شبه متماثلة	قطرية	مثلثين

---

(٣٣) إذا كان $\begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -٣ & س \end{pmatrix}$ = I فإن س = ...

صفر	١	٤	٥

---

(٣٤) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ ، أ ب مصفوفة على النظم ٢ × ٣
فإن المصفوفة ب على النظم ....

٢ × ٢	٣ × ٢	٢ × ٣	٣ × ٣

---

(٣٥) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ١ × ٣ ، $ب^{مد}$ مصفوفة على النظم ١ × ٣
فإنه يمكن إجراء العملية الآتية ....

أ + ب	$ب^{مد}$ + $أ^{مد}$	أ $ب^{مد}$	أ ب

---

(٣٦) إذا كان أ ، ب مصفوفتان حيث أ × ب = $\begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ ٣ & ٧ \end{pmatrix}$ فإن $ب^{مد}$ $أ^{مد}$ =.......

$\begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ ٣ & ٧ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -٢ & ٥ \\ ٧ & ٣ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ -٢ & ٧ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ٣ & ٧ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix}$

---

(٣٧) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} جتا\theta & جا\theta \\ جا\theta & -جتا\theta \end{pmatrix}$ فإن $أ^{٢٠٠٠}$ = ...

أ	I	$أ^{٢}$	غير ذلك

---

(٣٨) إذا كانت أ مصفوفة على النظم م × ل ، ب مصفوفة على النظم ر × ن
فإن أ × ب يكون معرفاً إذا كان ....

م = ر	ل = ر	ر = ن	م = ن

الوحدة الثانية

المحددات

الدرس الأول

أختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) إذا كان ٩ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ فإن | ٩ | = ...

١	-١	١١	-١١

(٢) إذا كان ٩ مصفوفة مربعة بحيث | ٩ | = ٢ فإن | ٩ مد | =..............

صفر	-٢	$\frac{١}{٢}$	٢

(٣) إذا كان $\begin{vmatrix} س & -٢ \\ -١٨ & س \end{vmatrix}$ = صفر فإن س =..........

٦	٩	± ٦	١٢

(٤) قيمة المحدد $\begin{vmatrix} -٢ & ٣ & ٧ \\ ٠ & ٤ & ٥ \\ ٠ & ٠ & -٣ \end{vmatrix}$ = ...

-٢٤	٢٤	٢٤٢	صفر

(٥) إذا كان $\begin{vmatrix} س^٢ & ٥ \\ ٣ & س \end{vmatrix}$ = ١٢ فإن س = ...

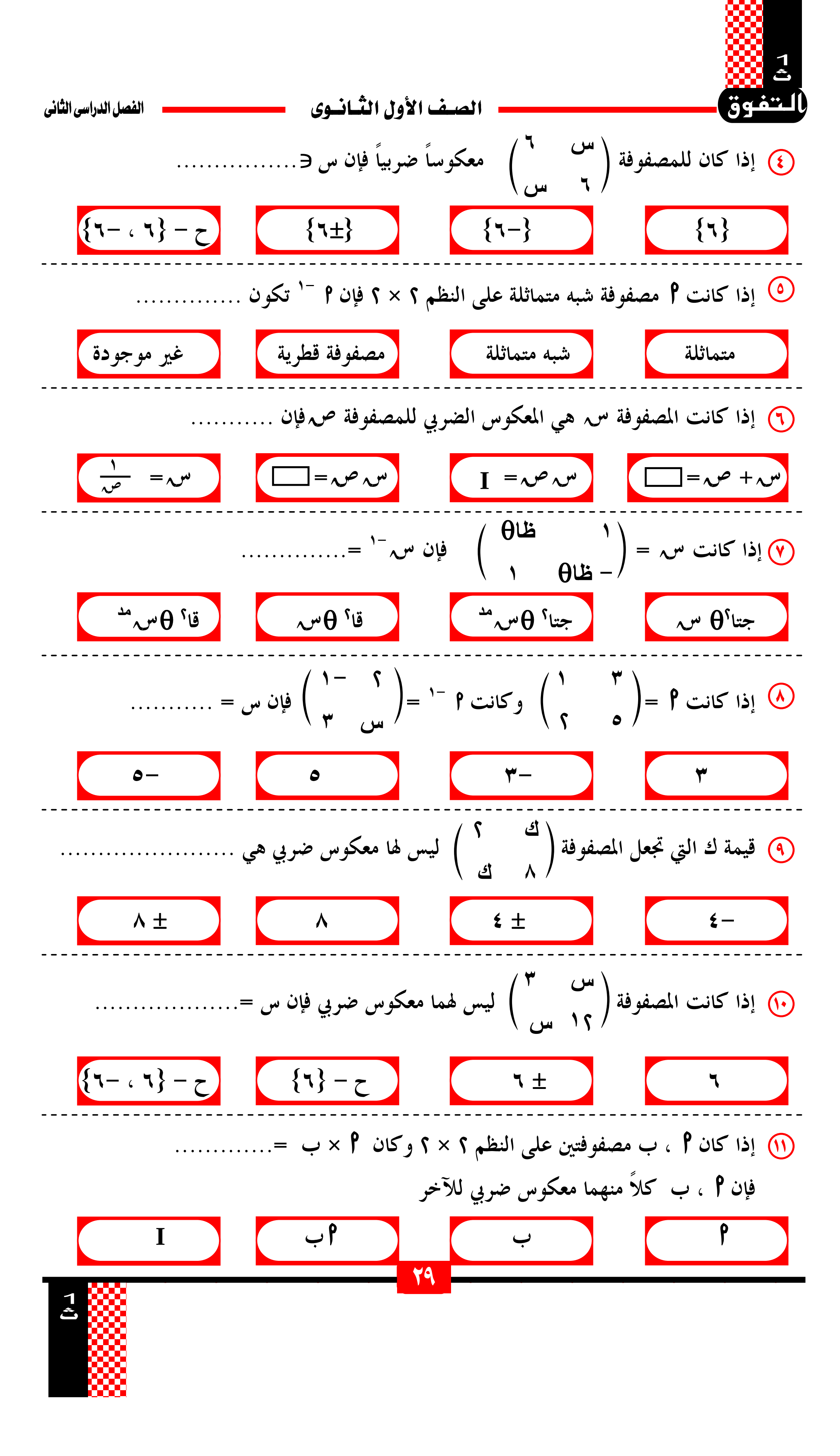
١٥	٣	١٢	٢٧

(٦) إذا كان $\begin{vmatrix} س & -٢ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}$ فإن س =............

٧	-٣	١	٢

(٧) إذا كان $\begin{vmatrix} ٢س & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٤ & ٠ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٤٨ فإن س =.............

٢	٣	٤	٥



④ إذا كان للمصفوفة $\begin{pmatrix} ٦ & س \\ س & ٦ \end{pmatrix}$ معكوساً ضربياً فإن س ∈ ....

{٦}	{-٦}	{±٦}	ح - {٦ ، -٦}

---

⑤ إذا كانت م مصفوفة شبه متماثلة على النظم ٢ × ٢ فإن م$^{-١}$ تكون ....

متماثلة	شبه متماثلة	مصفوفة قطرية	غير موجودة

---

⑥ إذا كانت المصفوفة س هي المعكوس الضربي للمصفوفة ص فإن ....

س + ص = □	س ص = I	س ص = □	س = $\frac{١}{ص}$

---

⑦ إذا كانت س = $\begin{pmatrix} ظاθ & ١ \\ ١ & -ظاθ \end{pmatrix}$ فإن س$^{-١}$ = ...

جتا²θ س	جتا²θ س^{مد}	قا²θ س	قا²θ س^{مد}

---

⑧ إذا كانت م = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ وكانت م$^{-١}$ = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & س \end{pmatrix}$ فإن س = ...

٣	-٣	٥	-٥

---

⑨ قيمة ك التي تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & ك \\ ك & ٨ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربي هي ....

-٤	± ٤	٨	± ٨

---

⑩ إذا كانت المصفوفة $\begin{pmatrix} ٣ & س \\ س & ١٢ \end{pmatrix}$ ليس لهما معكوس ضربي فإن س =...................

٦	± ٦	ح - {٦}	ح - {٦ ، -٦}

---

⑪ إذا كان م ، ب مصفوفتين على النظم ٢ × ٢ وكان م × ب = ...
فإن م ، ب كلاً منهما معكوس ضربي للآخر

م	ب	م ب	I



(١٤) النقطة .... تنتمي لمجموعة حل المتباينة ٢س + ٣ ص > ٦

(١، ١) — (٢ ، ٠) — (٠ ، ٢) — (١ ، ٢)

---

(١٥) المستقيم س = م يمثل بيانياً بمستقيم يوازي ....

محور السينات — محور الصادات — س + ص = ٣ — ص = ٢

---

(١٦) المستقيم ص = ب يمثل بيانياً بخط مستقيم يوازي ....

محور السينات — محور الصادات — س + ص = صفر — س =٣

---

(١٧) إذا كانت (١ ، ص) تنتمي إلى منطقة حل المتباينة س + ٢ص > ٧ فإن.................

ص > ٣ — ص < ٣ — ص = ٣ — ص < ٧

---

(١٨) النقطة ....لا تقع فى منطقة حل المتباينة س + ص ≤ ٤

(−١ ، ٦) — (٣ ، ٢) — (٠ ، ٣) — (١ ، ٤)

---

(١٩) إذا كانت النقطة (٣ ، ٤) تنتمي لمجموعة حل المتباينة س + ص ≥ ك فإن ....

ك < ٧ — ك ≤ ٧ — ك > ٧ — ك > صفر

---

(٢٠) النقطتان (٣ ، ٥) ، (١ ، ٥) تنتميان لمجموعة حل المتباينة س + ص ٨

> — ≥ — < — ≤

---

(٢١) منطقة حل المتباينتين س > ٠ ، ص > ٠ تقع في الربع ....

الأول — الثاني — الثالث — الرابع

---

(٢٢) النقطة التي تنتمي لمجموعة حل المتباينات س > ٢ ، ص < ١ ، س + ص ≤ ٣ هي ....

(٣ ، ٢) — (٤ ، ٢) — (٢,١ ، ٢,١) — جميع ما سبق

---

(٢٣) إذا كانت س ، ص أعداد صحيحة حيث س > ٠ ، ص > ٠ ، س + ص > ٥ فإن عدد الأزواج المرتبة (س ، ص) التي تحقق الشروط السابقة يساوي ......

٤ — ٥ — ٦ — ٧

(٢٤) النقطة التي تنتمي إلى مجموعة حل المتباينات الآتية س > ٠ ، ص > ٠ ، ٢ س + ص < ٤ ، س + ٣ ص < ٦ هي ....

(١ ، -٢)	(٣ ، ٠)	(٢ ، ٣)	(١ ، ١)

---

(٢٥) النقطتان (٢ ، ٣) ، (١ ، ٢) تنتميان لمجموعة حل المتباينة س + ص ٥

>	≥	<	≤

---

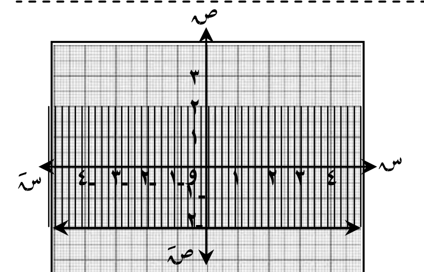
(٢٦) إذا كانت (أ ، ب) ينتمي لمجموعة حل المتباينة : س + ٢ص ≤ ٥ حيث أ ، ب أعداد صحيحة فإن أقل قيمة للمقدار ٢ أ + ٤ ب =................

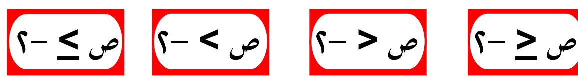
٥	-٥	١٠	٦



(٢٧) فى الشكل المقابل :

يمثل مجموعة حل المتباينة ....





ص ≥ -٢	ص > -٢	ص < -٢	ص ≤ -٢



(٢٨) فى الشكل المقابل :

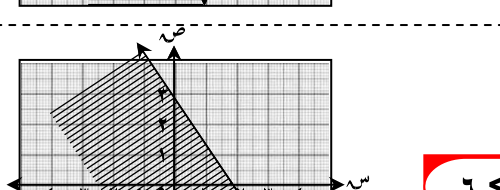
يمثل مجموعة حل المتباينة ....

س ≤ ١	س < ١	س > ١	س ≥ ١

---

(٢٩) فى الشكل المقابل :

يمثل مجموعة حل المتباينة ....



٣ س + ٢ص < ٦	٣ س + ٢ص ≤ ٦
٣ س + ٢ص > ٦	٣ س + ٢ص ≥ ٦

ثانيا : حساب المثلثات

الدرس الأول — **العلاقات الأساسية الدوال المعطاة** — **الوحدة الأولى**

أختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

① أبسط صورة للمقدار : ١ + ظتا² θ هي ....

حا² θ	جتا² θ	قا² θ	قتا² θ

② المقدار حا² θ + حتا² θ – قتا² θ = ... (في أبسط صورة)

صفر	١	– ظتا² θ	ظا² θ

③ المقدار حا (٩٠° – θ) قتا (٩٠° – θ) في أبسط صورة يساوي ....

١	حا² θ	جتا² θ	حا جتا θ

④ إذا كان قا² θ = ٢ فإن ٣ + ظا² θ = ...

١	٢	٣	٤

⑤ ٢ حا² ٣س³ + ٢ جتا² ٣ س³ = ...

٦	٥٤	٢	٢ س²

⑥
$$\begin{vmatrix} \text{جا}\theta & -\text{جتا}\theta \\ \text{جتا}\theta & \text{جا}\theta \end{vmatrix} = ...$$

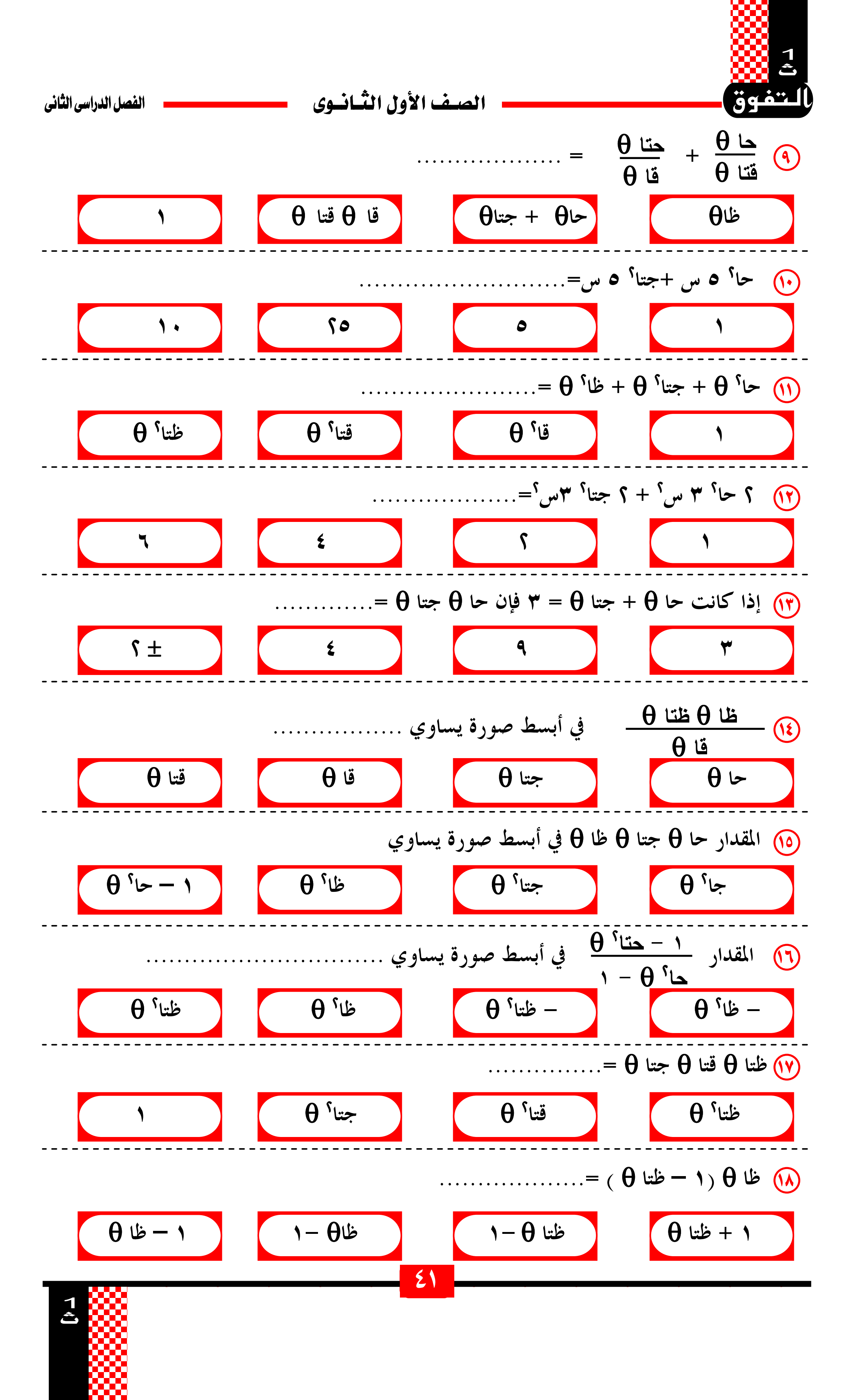
١	–١	ظا θ	حا θ

⑦ إذا كانت : قتا θ – ظتا θ = $\frac{١}{٥}$ فإن قتا θ + ظتا θ = ...

$\frac{-١}{١٠}$	٥	$\frac{١}{٢٥}$	١

⑧ إذا كانت قا² θ = ٥ فإن ظا² θ = ...

١	٣	٤	٦



⑨ $\frac{حا\ \theta}{قتا\ \theta} + \frac{حتا\ \theta}{قا\ \theta}$ = ...

ظا θ	حا θ + جتا θ	قا θ قتا θ	١

⑩ حا² ٥ س + جتا² ٥ س = ...

١	٥	٢٥	١٠

⑪ حا² θ + جتا² θ + ظا² θ = ...

١	قا² θ	قتا² θ	ظتا² θ

⑫ ٢ حا² ٣ س² + ٢ جتا² ٣ س² = ...

١	٢	٤	٦

⑬ إذا كانت حا θ + جتا θ = ٣ فإن حا θ جتا θ = ...

٣	٩	٤	± ٢

⑭ $\frac{ظا\ \theta\ ظتا\ \theta}{قا\ \theta}$ في أبسط صورة يساوي ....

حا θ	جتا θ	قا θ	قتا θ

⑮ المقدار حا θ جتا θ ظا θ في أبسط صورة يساوي

جا² θ	جتا² θ	ظا² θ	١ − حا² θ

⑯ المقدار $\frac{١ - حتا^2\ \theta}{حا^2\ \theta - ١}$ في أبسط صورة يساوي ....

− ظا² θ	− ظتا² θ	ظا² θ	ظتا² θ

⑰ ظتا θ قتا θ جتا θ = ...

ظتا² θ	قتا² θ	جتا² θ	١

⑱ ظا θ (١ − ظتا θ) = ...

١ + ظتا θ	ظتا θ − ١	ظا θ − ١	١ − ظا θ

(٢٩) (ظتا^٢ ٣ θ − قتا^٢ ٣ θ)^٧ = ...

٧	−٧	١	−١

---

(٣٠) (قا θ − ظا θ) (قا θ + ظا θ) = ...

١	−١	٢ قا θ	ظا θ

---

(٣١) إذا كان قتا^٢ θ = $\frac{٢٥}{٩}$ فإن ظتا^٢ θ = ...

١	$\frac{١٦}{٩}$	$\frac{٩}{١٦}$	−١

---

(٣٢) حا^٢ θ + جتا^٢ (١٨٠° − θ) = ...

١	صفر	ظا^٢ θ	٢ حا^٢ θ

---

(٣٣) المقدار $\frac{(\text{حا } θ - \text{حتا } θ)^٢ + ٢ \text{ حا } θ \text{ حتا } θ}{\text{قتا}^٢ θ - \text{ظتا}^٢ θ}$ في أبسط صورة يساوي ....

١	−١	ظا^٢ θ	قا^٢ θ

---

(٣٤) إذا كان المقدار $\frac{١ - \text{حتا}^٢ θ}{١ - \text{حا}^٢ θ}$ + (حا θ − جتا θ)^٢ + ٢ حاθ جتاθ = ٢ ، زاوية θ حادة فإن θ = ... °

٣٠	٤٥	٦٠	٧٥

---

(٣٥) كل الكميات التالية متساوية ما عدا ....

حا($\frac{π}{٢}$ + θ) قا (− θ)	قتا^٢ θ − ظتا^٢ θ
$\frac{١}{\text{حتا}^٢ θ}$ − $\frac{١}{\text{ظتا}^٢ θ}$	حتا($\frac{π}{٢}$ + θ) قا (− θ)

---

(٣٦) إذا كان ٩ = ٤ حا س + ٣ جتا س ، ب = ٤ جتا س −٣ حا س فإن $\sqrt{٩^٢ + ب^٢}$ = ...

٥ جتا س	٥ حا س	٥ ظا س	٥

⑤ مجموعة حل المعادلة : ٢ جتا θ + ١ = صفر حيث θ ∈ [٠ ، π] هي ....

{٣٠}	{٦٠}	{٩٠}	{١٢٠}

⑥ إذا كان ظا θ − ١ = صفر ، θ ∈ [$\frac{\pi}{٢}$ ، ٢ π] فإن θ =............°

٤٥	١٣٥	٢٢٥	٣١٥

⑦ إذا كان ٢ جتا θ − ١ = ٠ حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π] هي ....

{٦٠ ، ١٢٠}	{٣٠ ، ١٥}	{٣٠، ٣٣٠}	{٦٠ ، ٣٠٠}

⑧ إذا كان $\sqrt{٣}$ ظا − ١ = صفر ، θ ∈ [٠ °، ١٨٠°] فإن θ =...........°

٣٠	٦٠	١٢٠	١٥٠

⑨ الحل العام للمعادلة حا θ =١ هو .... حيث ن ∈ ص

$\frac{ن \pi}{٢}$	ن π	$\frac{\pi}{٢}$ + ٢ ن π	$\frac{\pi}{٢}$ + ن π

⑩ الحل العام للمعادلة جتا θ =١ هو ....

ن π	٢ ن π	$\frac{\pi}{٢}$ + ن π	$\frac{\pi}{٢}$ + ٢ن π

⑪ إذا كانت ٠ ≤ θ ≤ ٣٦٠ ° وكانت قتاθ − ١ = صفر فإن θ = ...°

٠	٩٠	١٨٠	٢٧٠

⑫ إذا كان ظتا − ١ = صفر ، θ ∈ [٠ ، π] فإن θ =..................

٣٠	٤٥	٦٠	١٣٥

⑬ الحل العام للمعادلة ظاθ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ هو .... (ن ∈ ص)

$\frac{\pi}{٣}$ + ن π	٢ ن π ± $\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٦}$ + π ن	٢ ن π ± $\frac{\pi}{٣}$

⑭ إذا كان حا θ ظتا θ = $\frac{١}{٢}$، θ ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] فإن مجموعة الحل هي ....

∅	{ $\frac{\pi}{٣}$ }	{ $\frac{٤}{٣}$π}	{ $\frac{٥}{٣}$π}

(٢٥) الحل العام للمعادلة حا θ جتا θ = ٢ حا θ هو ....

ن π	٢ ن π	± ن π	± ٢ ن π

(٢٦) الحل العام للمعادلة : حا θ − $\sqrt{٣}$ جتا θ = صفر هو ....

$\frac{\pi}{٣}$ + ٢ ن π	$\frac{\pi}{٣}$ ن π	$\frac{\pi}{٣}$ + ن π	− $\frac{\pi}{٣}$ + ن π

(٢٧) الحل العام للمعادلة قا θ = ظا θ هو .... حيث ن ∈ ص

π + ٢ ن π	ن π	$\frac{\pi}{٢}$ ن π	$\frac{\pi}{٢}$ + ٢ نπ

(٢٨) إذا كان ٥ $^{حا ٢\theta}$ = ١ حيث θ ∈] ٠ ، ٢ π [فإن θ = ...

٤٥	٩٠	١٨٠	٢٧٠

(٣٠) إذا كان حا أ + جا ب = ٢ فإن ....

حتا أ + جتا ب = صفر	جتا أ − جتا ب = ١
حا أ − حا ب =١	حا (أ + ب) = −١

(٣١) إذا كان حا أ + جا ب = ٢ فإن ....

ظا أ + ظا ب = صفر	ظتا أ + ظتا ب= صفر
ظا أ − ظا ب= صفر	ظا أ + ظتا ب= صفر

الدرس الثالث

حل المثلث القائم

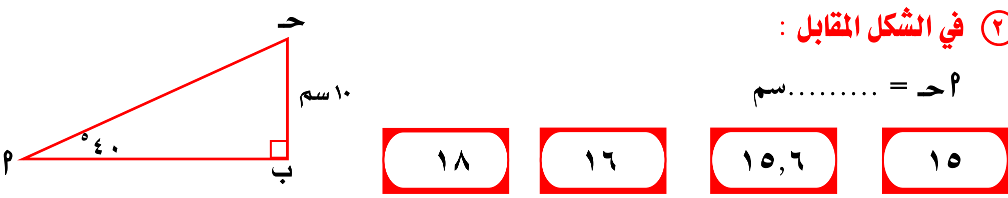
زوايا الارتفاع والانخفاض

(١) في أ ب حـ القائم الزاوية في ب إذا كان أ حـ = ١١سم ، ق(حـ^) = ٥٠ فإن ب حـ = ...

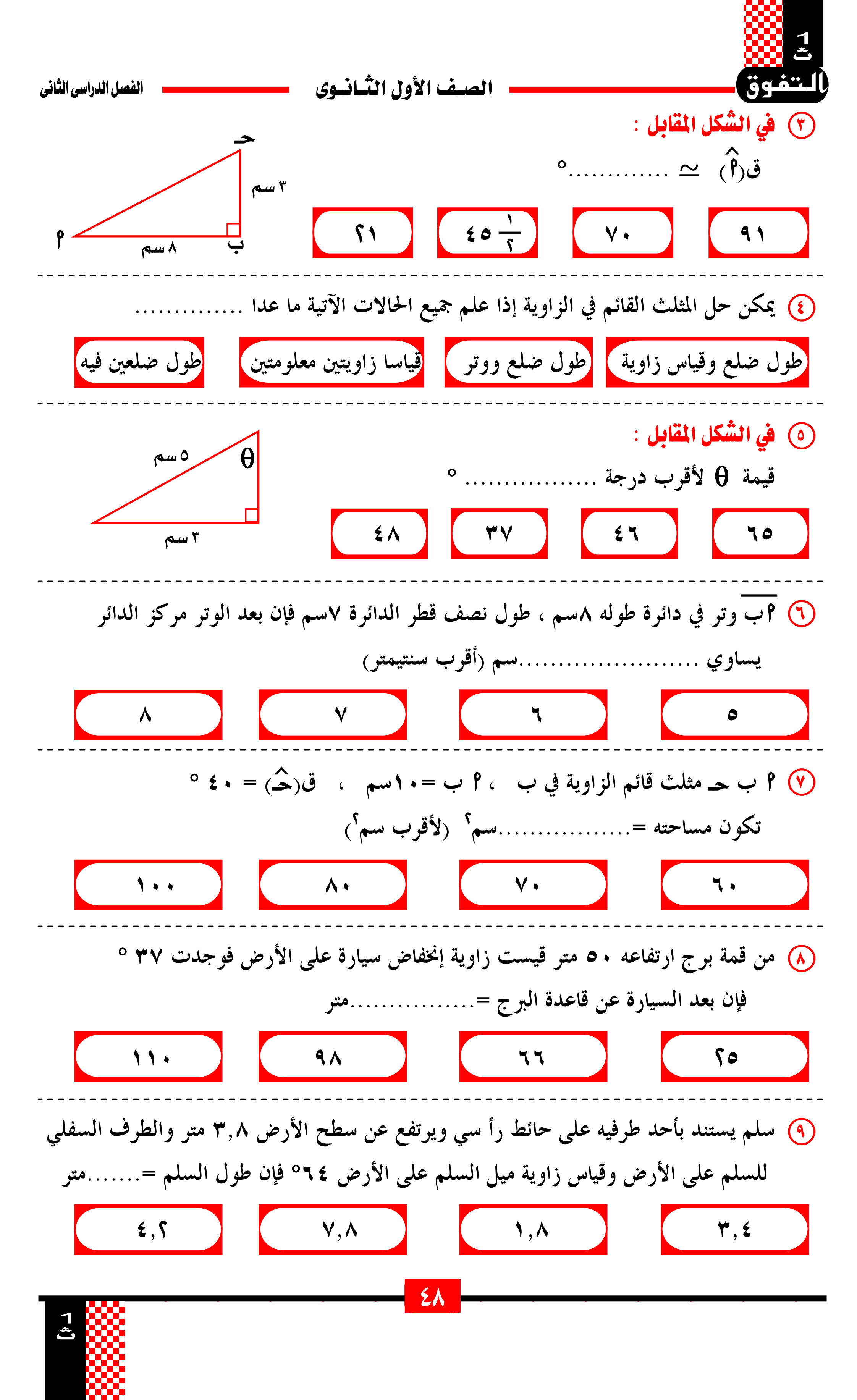
١١سم	١٧ سم	٧,٠٧ سم	٢٠سم

(٢) **في الشكل المقابل :**

أ حـ = ...سم



١٥	١٥,٦	١٦	١٨



③ **في الشكل المقابل :**

ق($\hat{أ}$) ≃ .... °

٩١	٧٠	$٤٥\frac{١}{٢}$	٢١

---

④ يمكن حل المثلث القائم في الزاوية إذا علم جميع الحالات الآتية ما عدا ....

طول ضلع وقياس زاوية	طول ضلع ووتر	قياسا زاويتين معلومتين	طول ضلعين فيه

---

⑤ **في الشكل المقابل :**

قيمة θ لأقرب درجة .... °

٦٥	٤٦	٣٧	٤٨

---

⑥ $\overline{أب}$ وتر في دائرة طوله ٨سم ، طول نصف قطر الدائرة ٧سم فإن بعد الوتر مركز الدائر يساوي ....سم (أقرب سنتيمتر)

٥	٦	٧	٨

---

⑦ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، أ ب = ١٠سم ، ق($\hat{حـ}$) = ٤٠ °

تكون مساحته = ...سم٢ (لأقرب سم٢)

٦٠	٧٠	٨٠	١٠٠

---

⑧ من قمة برج ارتفاعه ٥٠ متر قيست زاوية إنخفاض سيارة على الأرض فوجدت ٣٧ °

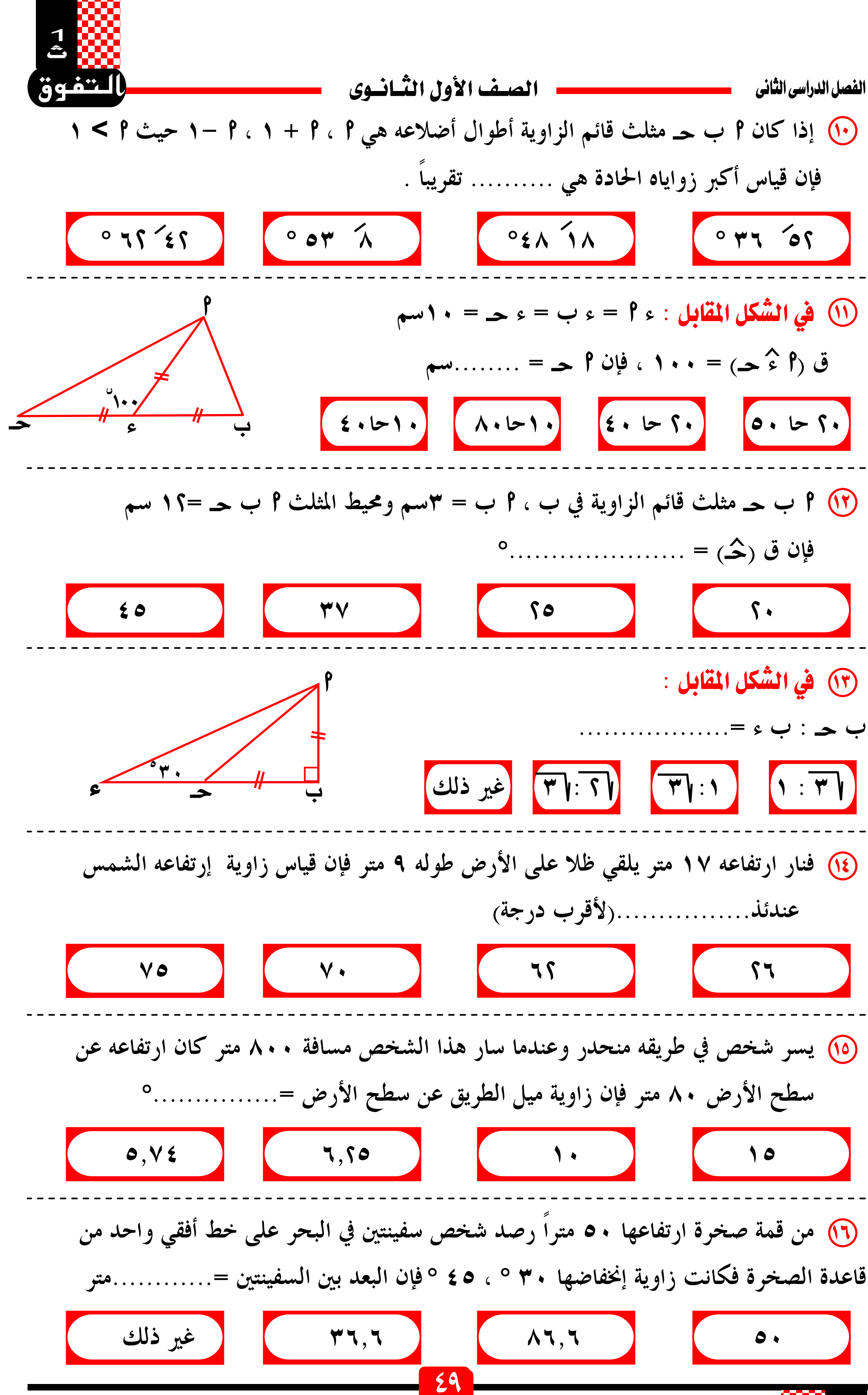
فإن بعد السيارة عن قاعدة البرج = ...متر

٢٥	٦٦	٩٨	١١٠

---

⑨ سلم يستند بأحد طرفيه على حائط رأ سي ويرتفع عن سطح الأرض ٣,٨ متر والطرف السفلي للسلم على الأرض وقياس زاوية ميل السلم على الأرض ٦٤° فإن طول السلم = ...متر

٣,٤	١,٨	٧,٨	٤,٢



⑩ إذا كان ٩ ب حـ مثلث قائم الزاوية أطوال أضلاعه هي ٩ ، ٩ + ١ ، ٩ − ١ حيث ٩ > ١
فإن قياس أكبر زواياه الحادة هي .... تقريباً .

٥٢َ ٣٦°	١٨َ ٤٨°	٨َ ٥٣°	٤٢َ ٦٢°

---

⑪ **في الشكل المقابل** : ء ٩ = ء ب = ء حـ = ١٠سم
ق (٩ ءˆ حـ) = ١٠٠ ، فإن ٩ حـ = ...سم

٢٠ حا ٥٠	٢٠ حا ٤٠	١٠حا٨٠	١٠حا٤٠

---

⑫ ٩ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، ٩ ب = ٣سم ومحيط المثلث ٩ ب حـ =١٢ سم
فإن ق (حـˆ) = ...°

٢٠	٢٥	٣٧	٤٥

---

⑬ **في الشكل المقابل** :
ب حـ : ب ء =..................

$\sqrt{٣}$: ١	١ : $\sqrt{٣}$	$\sqrt{٢}$: $\sqrt{٣}$	غير ذلك

---

⑭ فنار ارتفاعه ١٧ متر يلقي ظلا على الأرض طوله ٩ متر فإن قياس زاوية إرتفاعه الشمس
عندئذ................(لأقرب درجة)

٢٦	٦٢	٧٠	٧٥

---

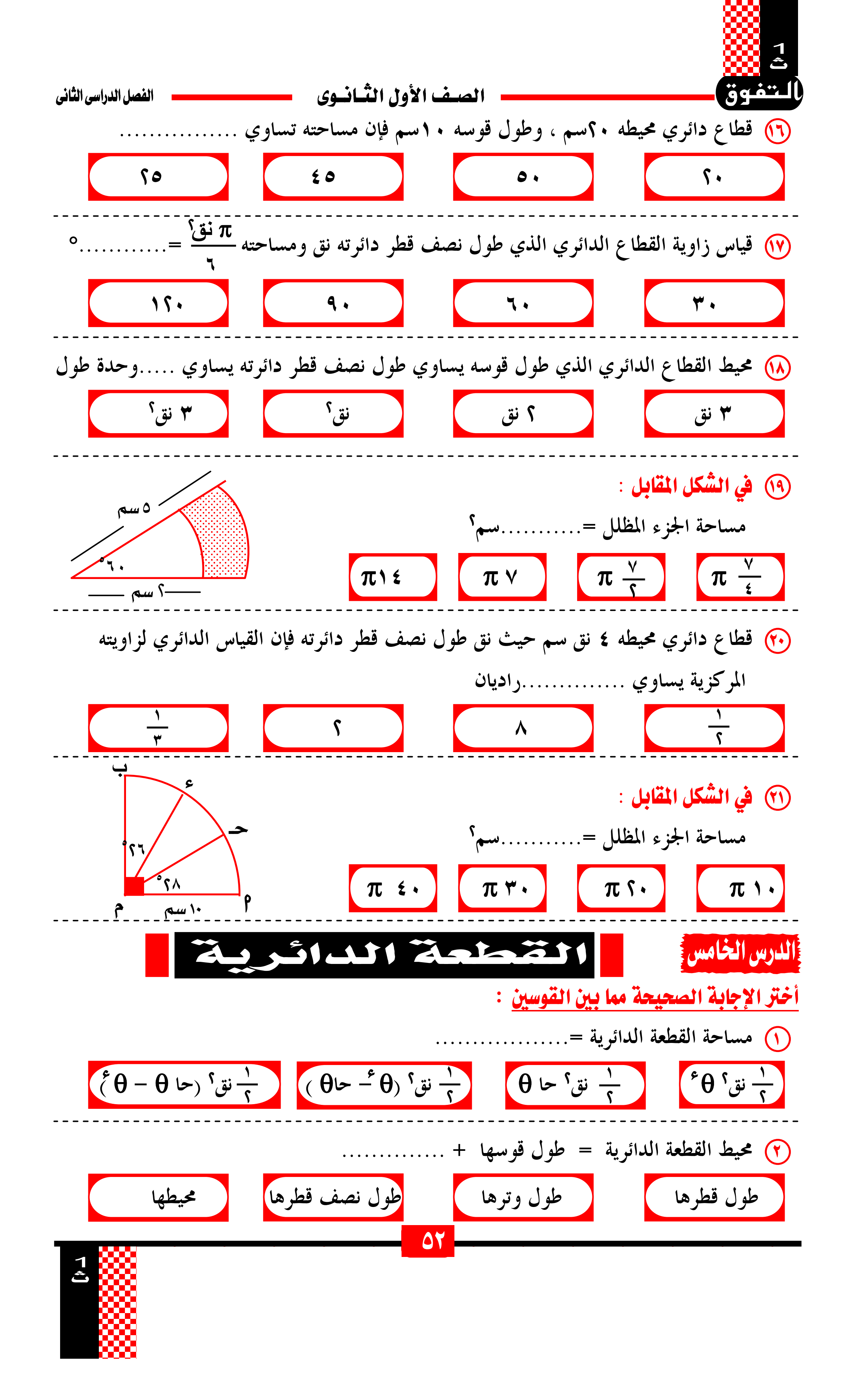
⑮ يسر شخص في طريقه منحدر وعندما سار هذا الشخص مسافة ٨٠٠ متر كان ارتفاعه عن
سطح الأرض ٨٠ متر فإن زاوية ميل الطريق عن سطح الأرض =..............°

١٥	١٠	٦,٢٥	٥,٧٤

---

⑯ من قمة صخرة ارتفاعها ٥٠ متراً رصد شخص سفينتين في البحر على خط أفقي واحد من
قاعدة الصخرة فكانت زاوية إنخفاضها ٣٠ ° ، ٤٥ ° فإن البعد بين السفينتين =............متر

٥٠	٨٦,٦	٣٦,٦	غير ذلك



(١٦) قطاع دائري محيطه ٢٠سم ، وطول قوسه ١٠سم فإن مساحته تساوي ....

٢٠	٥٠	٤٥	٢٥

---

(١٧) قياس زاوية القطاع الدائري الذي طول نصف قطر دائرته نق ومساحته $\frac{\pi \text{ نق}^2}{6}$ = ...°

٣٠	٦٠	٩٠	١٢٠

---

(١٨) محيط القطاع الدائري الذي طول قوسه يساوي طول نصف قطر دائرته يساوي .....وحدة طول

٣ نق	٢ نق	نق²	٣ نق²

---

(١٩) **في الشكل المقابل :**

مساحة الجزء المظلل = ...سم²

$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{7}{2}\pi$	٧ π	١٤ π

---

(٢٠) قطاع دائري محيطه ٤ نق سم حيث نق طول نصف قطر دائرته فإن القياس الدائري لزاويته المركزية يساوي ....راديان

$\frac{1}{2}$	٨	٢	$\frac{1}{3}$

---

(٢١) **في الشكل المقابل :**

مساحة الجزء المظلل = ...سم²

١٠ π	٢٠ π	٣٠ π	٤٠ π

الدرس الخامس — القطعة الدائرية

أختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) مساحة القطعة الدائرية = ...

$\frac{1}{2}$ نق² $\theta^{ء}$	$\frac{1}{2}$ نق² جا θ	$\frac{1}{2}$ نق² ($\theta^{ء}$ − جا θ)	$\frac{1}{2}$ نق² (جا θ − $\theta^{ء}$)

---

(٢) محيط القطعة الدائرية = طول قوسها + ...

طول قطرها	طول وترها	طول نصف قطرها	محيطها



ثانيا : الهندسة التحليلية

الدرس الأول — **الكميات القياسية والكميات المتجهة** — **الوحدة الأولى**

أختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

① .... من الكميات القياسية .

- الإزاحة
- القوة
- الكتلة
- السرعة

② .... من الكميات المتجهة .

- الزمن
- الحجم
- المسافة
- السرعة

③ .... هي أقصر بعدين بين نقطة البداية ونقطة النهاية.

- المسافة
- الإزاحة
- السرعة
- الطول

④ .... هي طول المسار الفعلي المقطوع أثناء الحركة من موضع إلى آخر.

- المسافة
- الإزاحة
- السرعة
- الطول

⑤ .... هي أقصر بعد بين نقطة البداية ونقطة النهاية.

- المسافة
- الإزاحة
- السرعة
- الطول

⑥ يتكافيء .... إذا كان لهما نفس الطول ونفس الإتجاه .

- المستقيمان
- الشعاعان
- القطعتان المستقيمتان الموجهتان
- القطعتان المستقيمتان

⑦ أي مما يلي يمثل كمية متجهة ....

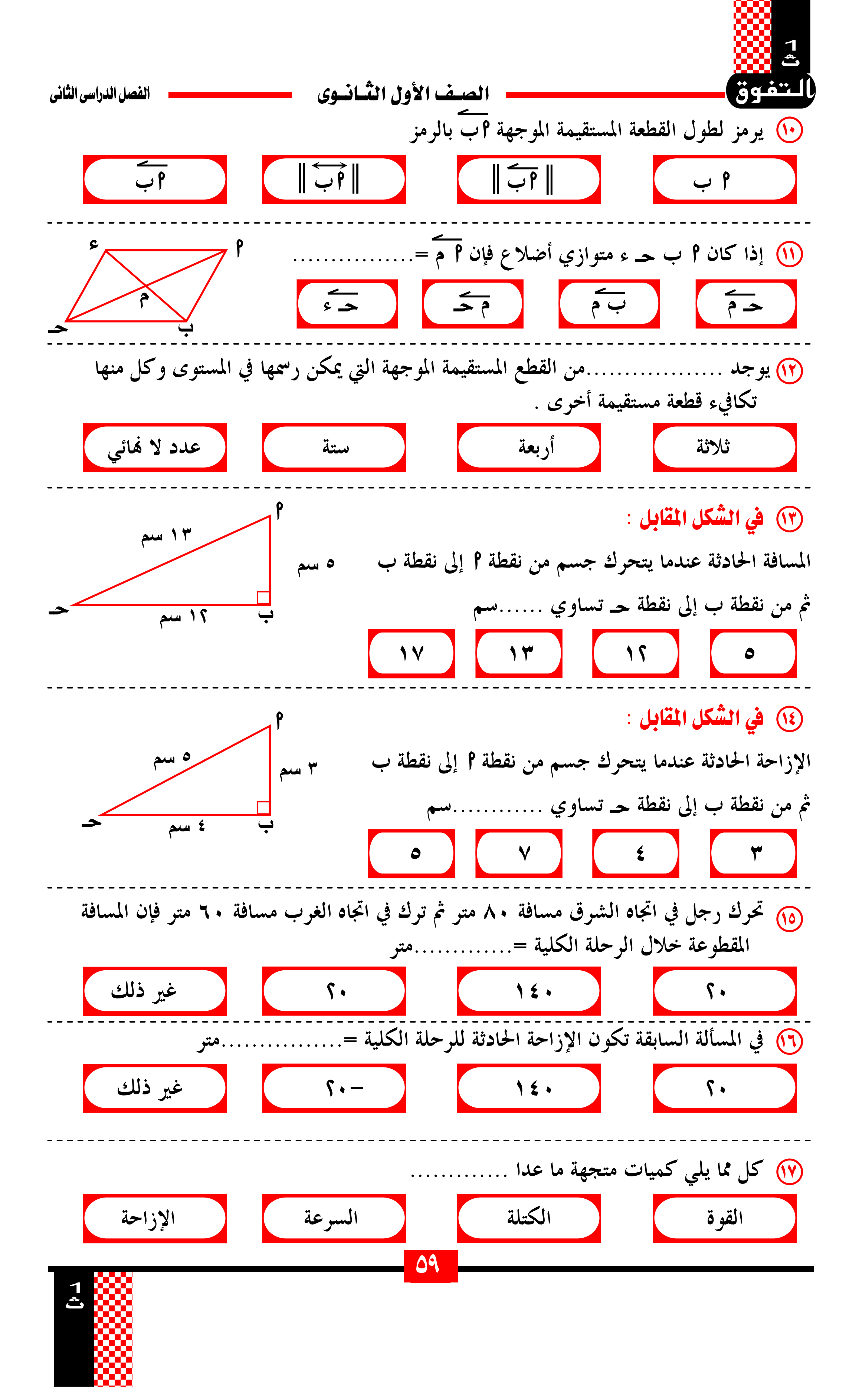
- الطول
- الحجم
- الإزاحة
- الكتلة

⑧ أ ب حـ ء مربع تقاطع قطراه في م ، فإن أزواج القطعة المستقيمة الموجهة الآتية متكافئة ماعداً ....

- أ ء ، ب حـ
- ب م ، م ء
- أ ب ، ء حـ
- م ب ، م حـ

⑨ الشعاعان المتحدان في الاتجاه أو المتضادين في الاتجاه يحملهما ....

- مستقيم واحد
- مستقيمان متوازيان
- شعاع واحد
- مستقيم واحد أو مستقيمان متوازيان



⑩ يرمز لطول القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{\text{أب}}$ بالرمز

أ ب	‖ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ‖	‖ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ‖	$\overrightarrow{\text{أب}}$

---

⑪ إذا كان أ ب حـ ء متوازي أضلاع فإن $\overrightarrow{\text{أم}}$ = ...

$\overrightarrow{\text{حـ م}}$	$\overrightarrow{\text{ب م}}$	$\overrightarrow{\text{م حـ}}$	$\overrightarrow{\text{حـ ء}}$

---

⑫ يوجد .... من القطع المستقيمة الموجهة التي يمكن رسمها في المستوى وكل منها تكافيء قطعة مستقيمة أخرى .

ثلاثة	أربعة	ستة	عدد لا نهائي

---

⑬ **في الشكل المقابل :**

المسافة الحادثة عندما يتحرك جسم من نقطة أ إلى نقطة ب ثم من نقطة ب إلى نقطة حـ تساوي ......سم

٥	١٢	١٣	١٧

---

⑭ **في الشكل المقابل :**

الإزاحة الحادثة عندما يتحرك جسم من نقطة أ إلى نقطة ب ثم من نقطة ب إلى نقطة حـ تساوي ....سم

٣	٤	٧	٥

---

⑮ تحرك رجل في اتجاه الشرق مسافة ٨٠ متر ثم ترك في اتجاه الغرب مسافة ٦٠ متر فإن المسافة المقطوعة خلال الرحلة الكلية =............متر

٢٠	١٤٠	٢٠	غير ذلك

---

⑯ في المسألة السابقة تكون الإزاحة الحادثة للرحلة الكلية =...............متر

٢٠	١٤٠	٢٠-	غير ذلك

---

⑰ كل مما يلي كميات متجهة ما عدا ....

القوة	الكتلة	السرعة	الإزاحة

الدرس الثانى

المتجهات

أختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

① إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (−٣ ، ٤) فإن ‖ $\overleftarrow{أ}$ ‖ = ...

٩	١٦	٢٥	٥

② إذا كان $\overleftarrow{أ}$ + $\overleftarrow{ب}$ = (٧ ، ١١) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٣ ، ٨) فإن ‖ $\overleftarrow{أ}$ ‖ = ...

١٦	٤	٥	−٥

③ كل المتجهات الآتية متجهات وحدة ما عدا ....

(٠ ، −١)	(٠,٦ ، ٠,٨)	(١ ، −١)	(١ ، ٠)

④ إذا كان ‖ ك (٣ ، ٤) ‖ = ١ فإن ك = ...

$\frac{١}{٧}$	$\frac{١}{٢٥}$	± $\frac{١}{٥}$	± ٥

⑤ إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (٥ ، −١) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٢ ، ك) ، $\overleftarrow{أ}$ ⊥ $\overleftarrow{ب}$ فإن ك = ...

٢	−٢	١٠	−١٠

⑥ إذا كان $\overleftarrow{حـ}$ = (−١ ، ٦) ، $\overleftarrow{ء}$ = (−٤ ، ٢) فإن ‖ $\overleftarrow{حـ ء}$ ‖ = ...

٢	٣	٤	٥

⑦ إذا كان $\overleftarrow{ب}$ = (٢ ، −١) ، $\overleftarrow{حـ}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ فإن $\overleftarrow{ب حـ}$ = ...

(١ ، ٣)	(٥ ، ١)	(−١ ، −٢)	(١ ، −٣)

⑧ إذا كان $\overleftarrow{أ}$ ⊥ $\overleftarrow{ب}$ وكان $\overleftarrow{أ}$ = (١ ، ٠) ، $\overleftarrow{ب}$ = (ك ، ٩) فإن ك = ...

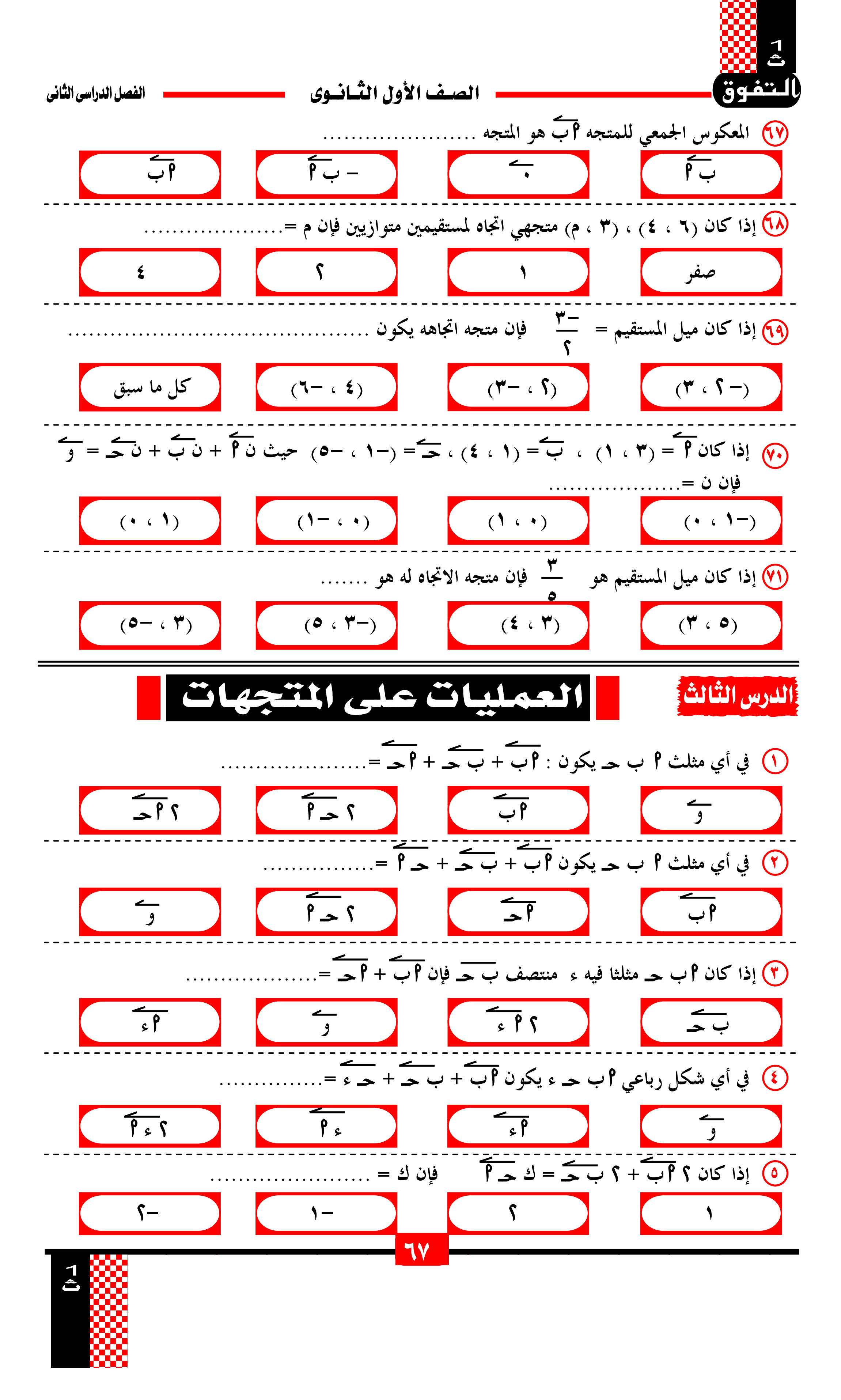
صفر	١	٢	٩

⑨ إذا كان ‖ ٤ ك $\overleftarrow{أ}$ ‖ = ‖ −١٢ $\overleftarrow{أ}$ ‖ فإن ك = ...

٣	−٣	± ٣	± ٤

⑩ إذا كان $\overleftarrow{م}$ = (٢ ، ٥) ، $\overleftarrow{ن}$ = (١ ، ٣) فإن ٢ $\overleftarrow{م}$ − $\overleftarrow{ن}$ = ...

(٣ ، ٧)	(١ ، ٢)	(٣ ، ٨)	(٠ ، ١)



(٦٧) المعكوس الجمعي للمتجه $\overrightarrow{أب}$ هو المتجه ....

- $\overrightarrow{ب أ}$
- $\overrightarrow{0}$
- $- \overrightarrow{ب أ}$
- $\overrightarrow{أب}$

---

(٦٨) إذا كان (٦ ، ٤) ، (٣ ، م) متجهي اتجاه لمستقيمين متوازيين فإن م = ...

- صفر
- ١
- ٢
- ٤

---

(٦٩) إذا كان ميل المستقيم = $\frac{-٣}{٢}$ فإن متجه اتجاهه يكون ....

- (−٢ ، ٣)
- (٢ ، −٣)
- (٤ ، −٦)
- كل ما سبق

---

(٧٠) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، ٤) ، $\overrightarrow{حـ}$ = (−١ ، −٥) حيث ن $\overrightarrow{أ}$ + ن $\overrightarrow{ب}$ + ن $\overrightarrow{حـ}$ = $\overrightarrow{و}$
فإن ن = ...

- (−١ ، ٠)
- (٠ ، ١)
- (٠ ، −١)
- (١ ، ٠)

---

(٧١) إذا كان ميل المستقيم هو $\frac{٣}{٥}$ فإن متجه الاتجاه له هو ....

- (٥ ، ٣)
- (٣ ، ٤)
- (−٣ ، ٥)
- (٣ ، −٥)

الدرس الثالث

العمليات على المتجهات

(١) في أي مثلث أ ب حـ يكون : $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{ب حـ}$ + $\overrightarrow{أ حـ}$ = ...

- $\overrightarrow{و}$
- $\overrightarrow{أب}$
- ٢ $\overrightarrow{حـ أ}$
- ٢ $\overrightarrow{أ حـ}$

---

(٢) في أي مثلث أ ب حـ يكون $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{ب حـ}$ + $\overrightarrow{حـ أ}$ = ...

- $\overrightarrow{أب}$
- $\overrightarrow{أ حـ}$
- ٢ $\overrightarrow{حـ أ}$
- $\overrightarrow{و}$

---

(٣) إذا كان أ ب حـ مثلثا فيه ء منتصف $\overline{ب حـ}$ فإن $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{أ حـ}$ = ...

- $\overrightarrow{ب حـ}$
- ٢ $\overrightarrow{أ ء}$
- $\overrightarrow{و}$
- $\overrightarrow{أ ء}$

---

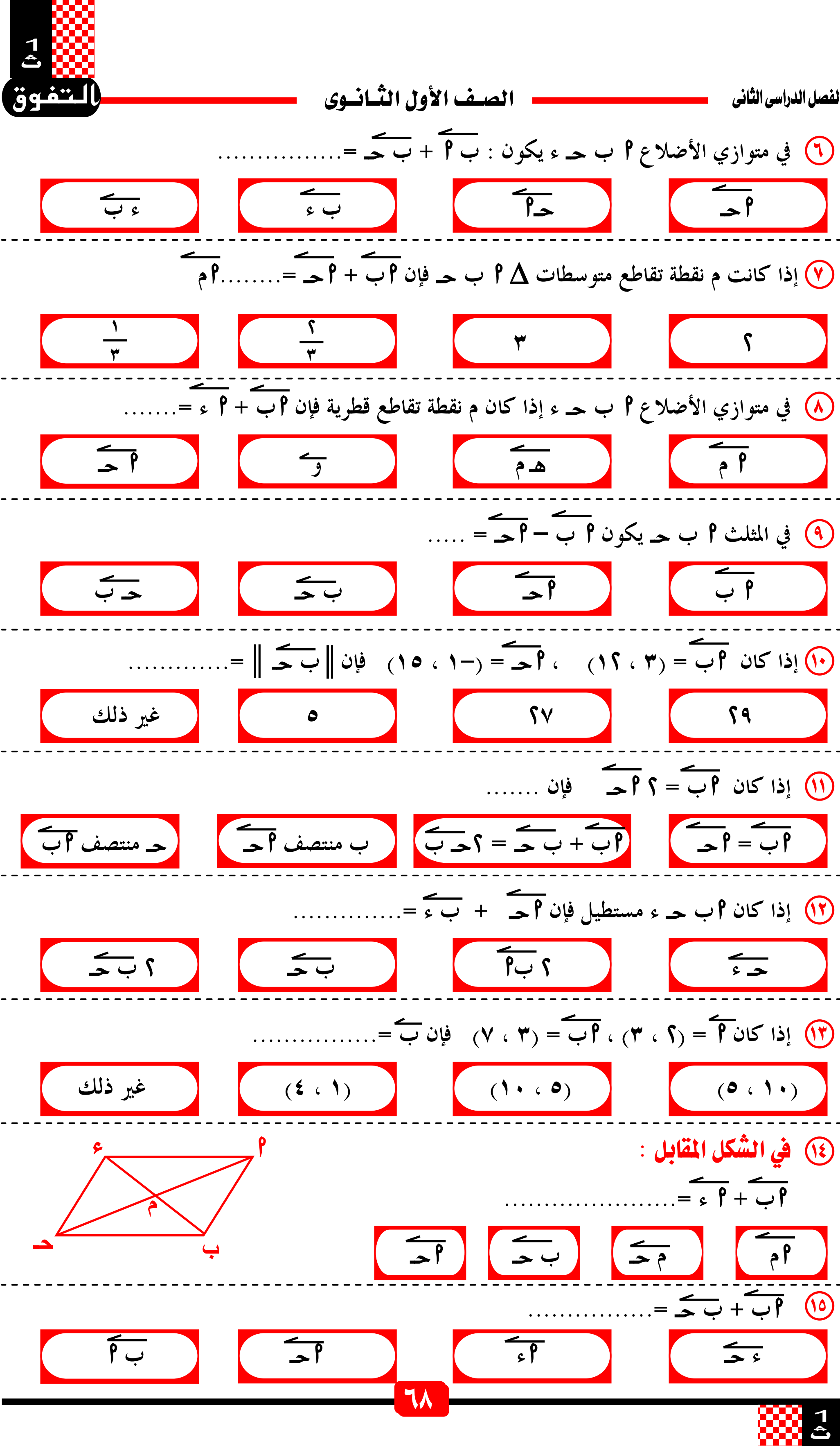
(٤) في أي شكل رباعي أ ب حـ ء يكون $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{ب حـ}$ + $\overrightarrow{حـ ء}$ = ...

- $\overrightarrow{و}$
- $\overrightarrow{أ ء}$
- $\overrightarrow{ء أ}$
- ٢ $\overrightarrow{ء أ}$

---

(٥) إذا كان ٢ $\overrightarrow{أب}$ + ٢ $\overrightarrow{ب حـ}$ = ك $\overrightarrow{حـ أ}$ فإن ك = ...

- ١
- ٢
- −١
- −٢



⑥ في متوازي الأضلاع أ ب حـ ء يكون : $\overrightarrow{\text{ب أ}} + \overrightarrow{\text{ب حـ}}$ = ...

$\overrightarrow{\text{أ حـ}}$	$\overrightarrow{\text{حـ أ}}$	$\overrightarrow{\text{ب ء}}$	$\overrightarrow{\text{ء ب}}$

⑦ إذا كانت م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ فإن $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ حـ}}$ = ... $\overrightarrow{\text{أ م}}$

٢	٣	$\frac{٢}{٣}$	$\frac{١}{٣}$

⑧ في متوازي الأضلاع أ ب حـ ء إذا كان م نقطة تقاطع قطرية فإن $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ ء}}$ = ...

$\overrightarrow{\text{أ م}}$	$\overrightarrow{\text{هـ م}}$	$\overrightarrow{\text{و}}$	$\overrightarrow{\text{أ حـ}}$

⑨ في المثلث أ ب حـ يكون $\overrightarrow{\text{أ ب}} - \overrightarrow{\text{أ حـ}}$ = ...

$\overrightarrow{\text{أ ب}}$	$\overrightarrow{\text{أ حـ}}$	$\overrightarrow{\text{ب حـ}}$	$\overrightarrow{\text{حـ ب}}$

⑩ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ = (٣ ، ١٢) ، $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ = (−١ ، ١٥) فإن $\|\overrightarrow{\text{ب حـ}}\|$ = ...

٢٩	٢٧	٥	غير ذلك

⑪ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ ب}} = ٢ \overrightarrow{\text{أ حـ}}$ فإن ....

$\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{أ حـ}}$	$\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب حـ}} = ٢ \overrightarrow{\text{حـ ب}}$	ب منتصف $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$	حـ منتصف $\overrightarrow{\text{أ ب}}$

⑫ إذا كان أ ب حـ ء مستطيل فإن $\overrightarrow{\text{أ حـ}} + \overrightarrow{\text{ب ء}}$ = ...

$\overrightarrow{\text{حـ ء}}$	$٢ \overrightarrow{\text{ب أ}}$	$\overrightarrow{\text{ب حـ}}$	$٢ \overrightarrow{\text{ب حـ}}$

⑬ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، ٣) ، $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ = (٣ ، ٧) فإن $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ...

(١٠ ، ٥)	(٥ ، ١٠)	(١ ، ٤)	غير ذلك

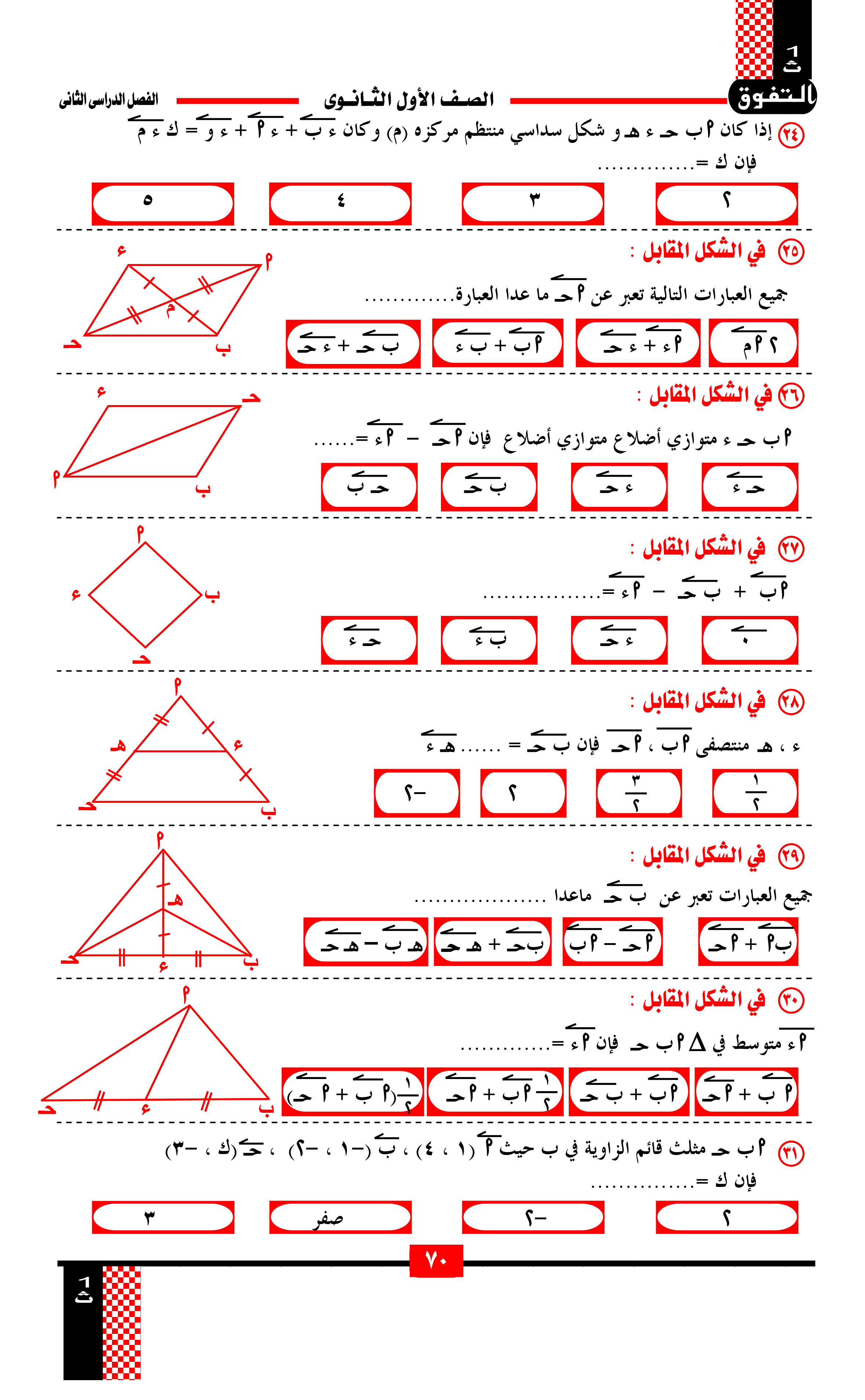
⑭ **في الشكل المقابل :**

$\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ ء}}$ = ...

$\overrightarrow{\text{أ م}}$	$\overrightarrow{\text{م حـ}}$	$\overrightarrow{\text{ب حـ}}$	$\overrightarrow{\text{أ حـ}}$

⑮ $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب حـ}}$ = ...

$\overrightarrow{\text{ء حـ}}$	$\overrightarrow{\text{أ ء}}$	$\overrightarrow{\text{أ حـ}}$	$\overrightarrow{\text{ب أ}}$



(٢٤) إذا كان أ ب حـ ء هـ و شكل سداسي منتظم مركزه (م) وكان $\overrightarrow{\text{ء ب}} + \overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{ء و}} = \text{ك}\ \overrightarrow{\text{ء م}}$

فإن ك = ...

- ٢
- ٣
- ٤
- ٥

---

(٢٥) في الشكل المقابل :

جميع العبارات التالية تعبر عن $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ ما عدا العبارة.............

- $٢\ \overrightarrow{\text{أ م}}$
- $\overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{ء حـ}}$
- $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب ء}}$
- $\overrightarrow{\text{ب حـ}} + \overrightarrow{\text{ء حـ}}$

---

(٢٦) في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازي أضلاع فإن $\overrightarrow{\text{أ حـ}} - \overrightarrow{\text{أ ء}} =$......

- $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$
- $\overrightarrow{\text{ء حـ}}$
- $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$
- $\overrightarrow{\text{حـ ب}}$

---

(٢٧) في الشكل المقابل :

$\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب حـ}} - \overrightarrow{\text{أ ء}} =$.................

- $\overrightarrow{٠}$
- $\overrightarrow{\text{ء حـ}}$
- $\overrightarrow{\text{ب ء}}$
- $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$

---

(٢٨) في الشكل المقابل :

ء ، هـ منتصفى $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ فإن $\overrightarrow{\text{ب حـ}} =$ ...... $\overrightarrow{\text{هـ ء}}$

- $\frac{١}{٢}$
- $\frac{٣}{٢}$
- ٢
- −٢

---

(٢٩) في الشكل المقابل :

جميع العبارات تعبر عن $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ ماعدا ....

- $\overrightarrow{\text{ب أ}} + \overrightarrow{\text{أ حـ}}$
- $\overrightarrow{\text{أ حـ}} - \overrightarrow{\text{أ ب}}$
- $\overrightarrow{\text{ب حـ}} + \overrightarrow{\text{هـ حـ}}$
- $\overrightarrow{\text{هـ ب}} - \overrightarrow{\text{هـ حـ}}$

---

(٣٠) في الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ء}}$ متوسط في Δ أ ب حـ فإن $\overrightarrow{\text{أ ء}} =$............

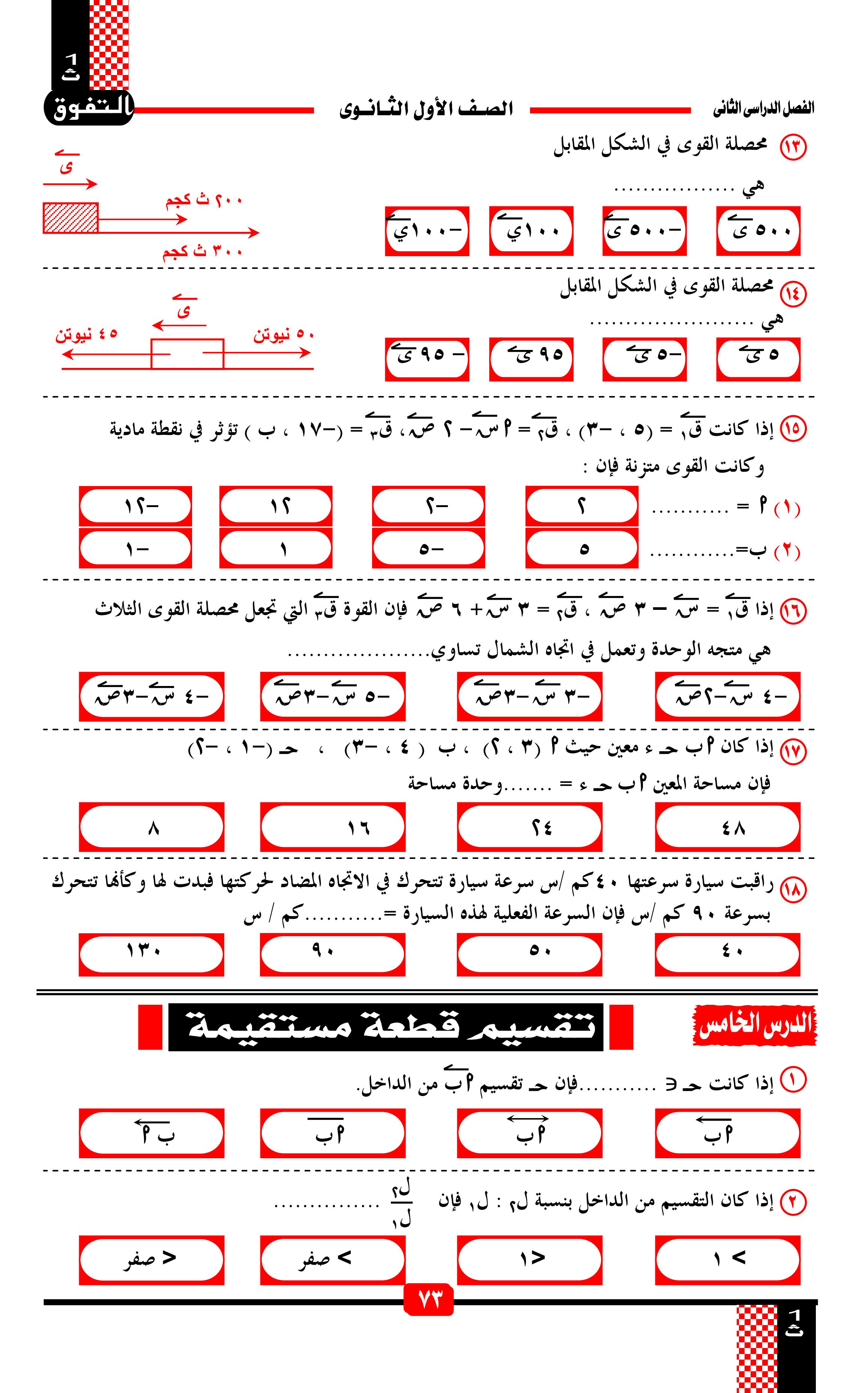
- $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ حـ}}$
- $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب حـ}}$
- $\frac{١}{٢}\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ حـ}}$
- $\frac{١}{٢}(\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ حـ}})$

---

(٣١) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب حيث $\overrightarrow{\text{أ}}$ (١ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ (−١ ، −٢) ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ (ك ، −٣)

فإن ك =...............

- ٢
- −٢
- صفر
- ٣



⑬ محصلة القوى في الشكل المقابل هي ....

٥٠٠ ى	−٥٠٠ ى	١٠٠ ى	−١٠٠ ى

⑭ محصلة القوى في الشكل المقابل هي ....

٥ ى	−٥ ى	٩٥ ى	−٩٥ ى

⑮ إذا كانت $\overleftarrow{ق_1}$ = (٥ ، −٣) ، $\overleftarrow{ق_2}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ − ٢ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ = (−١٧ ، ب) تؤثر في نقطة مادية وكانت القوى متزنة فإن :

(١) ٢ = ...

٢	−٢	١٢	−١٢

(٢) ب=............

٥	−٥	١	−١

⑯ إذا $\overleftarrow{ق_1}$ = $\overleftarrow{س}$ − ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + ٦ $\overleftarrow{ص}$ فإن القوة $\overleftarrow{ق_3}$ التي تجعل محصلة القوى الثلاث هي متجه الوحدة وتعمل في اتجاه الشمال تساوي.....................

−٤ $\overleftarrow{س}$ −٢ $\overleftarrow{ص}$	−٣ $\overleftarrow{س}$ −٣ $\overleftarrow{ص}$	−٥ $\overleftarrow{س}$ −٣ $\overleftarrow{ص}$	−٤ $\overleftarrow{س}$ −٣ $\overleftarrow{ص}$

⑰ إذا كان ٢ ب حـ ء معين حيث ٢ (٣ ، ٢) ، ب (٤ ، −٣) ، حـ (−١ ، −٢) فإن مساحة المعين ٢ ب حـ ء = ... وحدة مساحة

٤٨	٢٤	١٦	٨

⑱ راقبت سيارة سرعتها ٤٠ كم /س سرعة سيارة تتحرك في الاتجاه المضاد لحركتها فبدت لها وكأنها تتحرك بسرعة ٩٠ كم /س فإن السرعة الفعلية لهذه السيارة =...........كم / س

٤٠	٥٠	٩٠	١٣٠

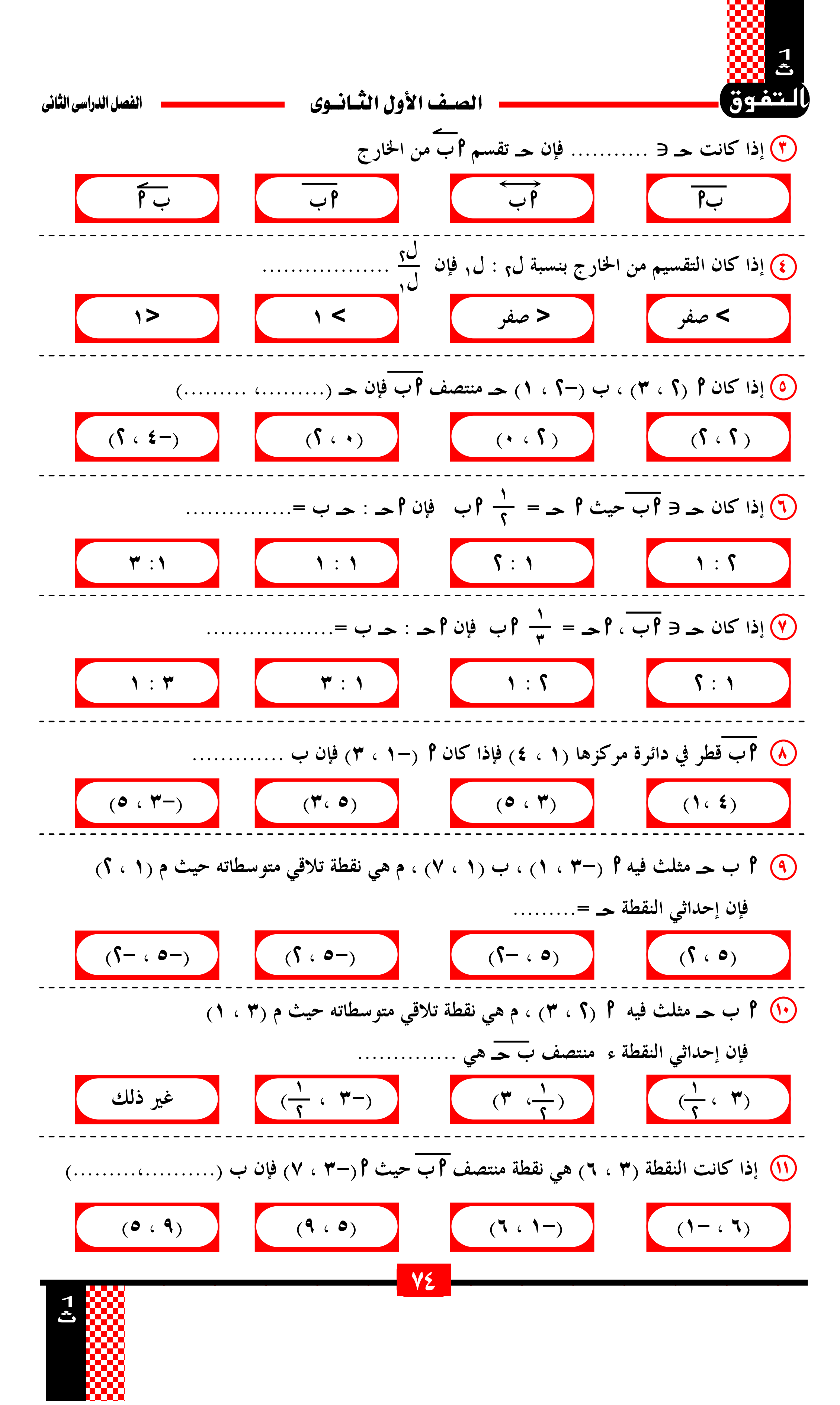
الدرس الخامس
تقسيم قطعة مستقيمة

① إذا كانت حـ ∋ .... فإن حـ تقسيم $\overleftarrow{٢ب}$ من الداخل.

$\overleftarrow{٢ب}$	$\overleftrightarrow{٢ب}$	$\overline{٢ب}$	$\overleftarrow{ب٢}$

② إذا كان التقسيم من الداخل بنسبة $ل_2$: $ل_1$ فإن $\frac{ل_2}{ل_1}$ ....

< ١	>١	< صفر	> صفر



(٣) إذا كانت حـ ∈ .... فإن حـ تقسم $\overleftarrow{\text{أب}}$ من الخارج

$\overline{\text{بأ}}$ | $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ | $\overline{\text{أب}}$ | $\overleftarrow{\text{بأ}}$

(٤) إذا كان التقسيم من الخارج بنسبة ل٢ : ل١ فإن $\frac{\text{ل}_2}{\text{ل}_1}$ ....

< صفر | > صفر | < ١ | ١>

(٥) إذا كان أ (٢ ، ٣) ، ب (-٢ ، ١) حـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ فإن حـ (.........، ....)

(٢ ، ٢) | (٢ ، ٠) | (٠ ، ٢) | (-٤ ، ٢)

(٦) إذا كان حـ ∈ $\overline{\text{أب}}$ حيث أ حـ = $\frac{1}{2}$ أ ب فإن أ حـ : حـ ب =...............

١ : ٢ | ٢ : ١ | ١ : ١ | ٣ : ١

(٧) إذا كان حـ ∈ $\overline{\text{أب}}$ ، أ حـ = $\frac{1}{3}$ أ ب فإن أ حـ : حـ ب =..................

٢ : ١ | ١ : ٢ | ٣ : ١ | ١ : ٣

(٨) $\overline{\text{أب}}$ قطر في دائرة مركزها (١ ، ٤) فإذا كان أ (-١ ، ٣) فإن ب ....

(٤ ، ١) | (٣ ، ٥) | (٥ ، ٣) | (-٣ ، ٥)

(٩) أ ب حـ مثلث فيه أ (-٣ ، ١) ، ب (١ ، ٧) ، م هي نقطة تلاقي متوسطاته حيث م (١ ، ٢)
فإن إحداثي النقطة حـ =.........

(٥ ، ٢) | (٥ ، -٢) | (-٥ ، ٢) | (-٥ ، -٢)

(١٠) أ ب حـ مثلث فيه أ (٢ ، ٣) ، م هي نقطة تلاقي متوسطاته حيث م (٣ ، ١)
فإن إحداثي النقطة ء منتصف $\overline{\text{بحـ}}$ هي ....

(٣ ، $\frac{1}{2}$) | ($\frac{1}{2}$ ، ٣) | (-٣ ، $\frac{1}{2}$) | غير ذلك

(١١) إذا كانت النقطة (٣ ، ٦) هي نقطة منتصف $\overline{\text{أب}}$ حيث أ(-٣ ، ٧) فإن ب (.........،..........)

(٦ ، -١) | (-١ ، ٦) | (٥ ، ٩) | (٩ ، ٥)

(١٢) إذا كان م (٢ ، −١) هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث ٲ ب حـ وكان ٲ (٥ ، −٤) ، ب(−٣ ، ٢)

فإن حـ (...... ،............)

(−١ ، ٤)	(٤ ، ١)	(٤ ، −١)	(١ ، ٤)

---

(١٣) إذا كان ٲ (−١ ، ٢) ، ب (٥ ، ٨) وكانت حـ تقسم $\overline{ٲب}$ بنسبة ١ : ٢ من الداخل فإن حـ =.....

(١ ، ٤)	(٣ ، ٦)	(١ ، ٦)	(٣ ، ٤)

---

(١٤) إذا كان ٲ (−٣ ، ٤) ، ب(٦ ، −٨) فإن محور الصادات يقسم $\overline{ٲب}$ بنسبة ..... : .....

١ : ٢ من الداخل	١ : ٢ من الخارج	٢ : ٢ من الداخل	٢ : ١ من الخارج

---

(١٥) إذا كان ٲ (−٣ ، ٤) ، ب (٦ ، −٨) فإن محور السينات يقسم $\overline{ٲب}$ بنسبة ....:........

١ : ٢ من الداخل	١ : ٢ من الخارج	٢ : ١ من الداخل	٢ : ١ من الخارج

---

(١٦) إذا كان ٲ ، ب هما صور النقطة (٣ ، ١) بالانعكاس في محور السينات والصادات على الترتيب

فإن إحداثيات النقطة التي تقسم $\overline{ٲب}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣ هي ......

(٣ ، −١)	($\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{-١}{٥}$)	($\frac{-٣}{٥}$ ، $\frac{١}{٥}$)	(٠ ، ٠)

---

(١٧) إذا كان ٲ ب حـ مثلث فيه ٲ (−١ ، ٧) ، ب (٢ ، ١) ، حـ (−٤ ، ٤) ، م نقطة تقاطع متوسطات

المثلث فإن م هي ....

(٠ ، ٤)	(−١ ، ٣)	(−١ ، ٤)	(٤ ، −١)

---

(١٨) إذا كانت ٲ (−٤ ، ٤) ، ب(٥ ، −٨) ، حـ ∈ $\overline{ٲب}$ بحيث ٲ حـ : حـ ب = ٢ : ١

فإن إحداثي حـ (...... ، .....)

(−٤ ، ٢)	(٢ ، −٤)	(٣ ، −٤)	(−١ ، ٠)

---

(١٩) إذا كانت ٲ (١ ، ٢) ، ب(٨ ، −٥) ، النقطة حـ تقسم $\overleftarrow{بٲ}$ من الخارج بنسبة ٤ : ٣

فإن إحداثي حـ ....

(٢٩ ، −٢٦)	(−٢٩ ، ٢٦)	(٣٥ ، −١٤)	(−٢٠ ، ٢٣)

(٢٤) المستقيم العمودي على المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٣) + ك ($\sqrt{٣}$ ، ١) يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها .... °

٣٠	٦٠	١٢٠	١٥٠

---

(٢٥) المعادلة المتجهة لمحور السينات هي ....

$\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٠) + ك (١ ، ١)	$\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ١) + ك (٠ ، ٠)
$\overleftarrow{ر}$ = ك (١ ،٠)	$\overleftarrow{ر}$ = ك (٠ ، ١)

---

(٢٦) إذا كان ميل مستقيم = $\frac{-١}{٢}$ فإن متجه اتجاهين يكون..........

(٢ ، −١)	(−١ ، ٢)	(١ ، ٢)	غير ذلك

---

(٢٧) معادلة المستقيم الذي يقع على بعدين متساويين من المستقيمين ص = −٤ ، ص = ٨ هي ....

ص = ٤	ص = ٦	ص = ٢	س = ٢

---

(٢٨) مساحة المثلث المحدد بالمستقيم ٢ س + ٣ص = ١٢ ومحوري الإحداثيات =.....وحدة مربعة

٢٤	١٢	٦	غير ذلك

---

(٢٩) محيط المثلث المحدد بالمستقيم $\frac{س}{٦}$ + $\frac{ص}{٨}$ =١ ومحوري الإحداثيات يساوي ....وحدة طول

١٤	٢٤	٤٨	٧

---

(٣٠) مساحة المثلث المحدد بالمستقيمات س = صفر ، ص = صفر ، $\frac{س}{٤}$ + $\frac{ص}{٣}$ = ١ تساوي ....وحدة مربعة

٣	٤	٦	١٢

---

(٣١) المستقيم الذي معادلته $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٣) + ك (١ ، ٣) ميله = ...

$\sqrt{٣}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\frac{-١}{\sqrt{٣}}$	٣

---

(٣٢) البعدين المستقيمين ص − ٣ = صفر ، ص + ٢ = صفر يساوي .... وحدات

١	٢	٣	٥

㉝ جميع المستقيمان الآتية توازي محور السينات عدا المستقيم ....

$\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ١) + ك (١ ، ٠)	$\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ١) + ك (١ ، ٠)
$\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ١) + ك (٠ ، ١)	ص = ٤

㉞ إذا كان المستقيم حـ س + ب ص + ٩ = صفر يوازي محور الصادات فإن ....= صفر

٩	ب	حـ	س

㉟ معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة ($\frac{-حـ}{٩}$ ، ٠) هي ....

٩ س – حـ = ٠	٩ص – حـ = ٠	٩ س + حـ = ٠	٩ص + حـ = ٠

㊱ معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (–٤ ، ٤) هي ....

س = –٤	ص = ٤	س + ص = صفر	س = ص

㊲ المستقيم الذي يقطع من محور السينات جزء طوله ٩ ويقطع من محور الصادات جزء طوله ب يمر بالنقطة ....

(٩ ، ب)	($\frac{١}{٢}$٩ ، $\frac{١}{٢}$ب)	($\frac{١}{٣}$٩ ، $\frac{١}{٣}$ب)	($\frac{١}{٤}$٩ ، $\frac{١}{٤}$ب)

㊳ إذا كان $\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{ق}$ + ك $\overleftarrow{ى}$ المعادلة المتجهة للخط المستقيم فإن ك ∈ ....

ح	ح – {٠}	ط	ص

㊴ إذا مر مستقيم بالنقطة (٢ ، ٣) وكان المتجه (١ ، ٢) عموديا عليه فإن معادلة المستقيم هي ....

س + ٢ ص + ٨ = ٠	س + ٢ ص – ٨ = ٠	س + ٢ص = صفر	غير ذلك

㊵ قياس الزاوية بين المستقيمين س –٣ = صفر ، ص = ٢ تساوي ....°

٣٠	٤٥	٦٠	٩٠

㊶ إذا كان المستقيم حـ س + ب ص + ٩ = صفر يوازي محور الصادات فإن ......= صفر

٩	ب	حـ	س

⑬ قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين س = ص ، ص = ٣ هو .... °

٣٠	٤٥	٦٠	١٨٠

⑭ قياس الزاوية بين المستقيمين ص = س ، ص = − س هي .... °

٣٠	٤٥	٦٠	٩٠

⑮ إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين ٣س − ٥ص −١ = ٠ ، ك س − ص = ٣ يساوى $\frac{ط}{٤}$ فإن ك ....

٣	٤	٥	−٤

⑯ قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، −٢) + ك (٣ ، −١) ،
$\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٥) + ك (١ ، ٢) هى .... (لأقرب درجة)

٨٠	٨١	٨٢	٨٣

⑰ قياس الزاوية المنفرجة بين الخطين المستقيمين : ص = (٢ − $\sqrt{٣}$) (س + ٥) ،
ص = (٢ + $\sqrt{٣}$) (س − ٧) هو .... °

١٥٠	٦٠	١٣٥	١٢٠

⑱ قياس الزاوية الحادة بين المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٢) + ك (١ ، ١) والمستقيم س = صفر هو ......°

٤٥	٣٠	١٣٥	٦٠

⑲ قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيمين : $\sqrt{٣}$ س − ص = ٤ ، ص = ٣ يساوي ....°

٣٠	٤٥	٦٠	٩٠

⑳ إذا كان المستقيم ٢ س − ص + ٣ = صفر يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
لزاوية قياسها ٤٥ ° فإن ٢ = ...

١	−١	$\frac{١}{٣}$	− ٢

㉑ قياس الزاوية بين المستقيمين : ٢ س + ١ = ٧ ، ص = ٥ يساوي ....°

٣٠	٤٥	٦٠	٩٠

㉒ قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيمين س − ص = صفر ، ص = ٢ هي ....°

٣٠	٤٥	٦٠	٩٠

(٢٣) إذا كان ي = (٢ ، ١) ، هـ = (-٣ ، ١) متجهي اتجاه لمستقيمين فإن قياس الزاوية الحادة بين هذين المستقيمين تساوي ....°

٣٠	٤٥	٦٠	٩٠

(٢٤) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين ر = (٢ ، ٣) + ك (-١ ، $\sqrt{٣}$) ، س - ص + ٢ = صفر تساوي ....°

١٥	٦٠	٧٥	غير ذلك

(٢٥) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين ل$_1$ = ٢س - ص + ٣ = صفر ،
ل$_2$ = س + ص + ٥ = صفر هى ....°

٣٤َ ١٧°	٣٤َ ٧١°	١٢َ ٣٦°	٧٠°

(٢٦) قياس الزاوية بين المستقيمين ٣س + ١ = ٥ ، ص = ٣ تساوي ....°

٣٠	٤٥	٦٠	٩٠

الدرس الثامن: طول العمود من نقطة معلومة إلى خط مستقيم معلوم

(١) طول العمود المرسوم من النقطة (-٣ ، ٥) إلى محور الصادات يساوي ....

٢	٣	٥	٩

(٢) البعد بين المستقيمين ص - ٣ = ٠ ، ص + ٢ = صفر يساوي ....

١	٢	٣	٥

(٣) طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ١) إلى المستقيم س + ص = صفر يساوي ....

١	$\sqrt{٢}$	٢	٢$\sqrt{٢}$

(٤) إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ١) إلى المستقيم ٣س - ٤ ص + حـ = صفر يساوي ٢ وحدة طول فإن حـ يمكن أن تساوي................

صفر	٣	٥	٧

(٥) طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ٥) إلى المستقيم ص = -٣ .... وحدات طول

٣	٨	٥	٢



(٦) طول العمود المرسوم من النقطة (٠ ، ٢) على المستقيم س + ٥ = صفر يساوي ....وحدة طول

٢	٥	٧	٣

(٧) المسافة العمودية بين المستقيمين س − ٢ = ٠ ، س + ٣ = ٠ تساوي ....وحدة طول

٢	٣	٥	١

(٨) طول العمود المرسوم من النقطة (−٣ ، ٥) إلى محور السينات يساوي ....وحدة طول

٢	٣	٥	٨

(٩) طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على المستقيم الذي معادلته ٣س −٤ ص −١٥ = صفر
يساوي ....وحدة طول

٣	٤	٥	١٥

(١٠) ﻫ ب حـ ء مربع حيث ﻫ (٢ ، −٣) ومعادلة $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ هي ٤س + ٣ص − ٩ = صفر
فإن مساحة مربع =.................وحدة مربعة

٢	٤	٦	٨

(١١) طول العمود المرسوم من نقطة الأصل إلى المستقيم ر = (١ ، ٢) + ك (٤ ، ٣)
يساوي ....وحدة طول .

١	٢	$\sqrt{٢}$	٣

(١٢) ﻫ ب حـ مثلث متساوي الأضلاع فيه ﻫ (٢ ، −١) ومعادلة $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ هي س + ص = ٢
فإن طول ضلع المثلث ﻫ ب حـ =...........وحدة طول .

$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٦}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٦}}{٣}$	٢

(١٣) إذا كان طول العمود المرسوم من نقطة الأصل إلى المستقيم ٦س − ٨ ص + ك = صفر
يساوي ٣ وحدة طول فإن إحدى قيم ك =.................

٦	٨	٩	٣٠

⑭ إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، حـ) إلى الخط المستقيم ٤س + ٣ص +٥ =صفر يساوي ٣ فإن حـ = ...

-٢ ، ٨	٢ ، ٨	٢ ، -٨	-٢ ، -٨

⑮ إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ١) إلى المستقيم ٣س – ٤ ص + ك = صفر يساوي ٢ وحدة طول فإن ك = ...

٣	٥ ، – ٥	٥ ، -١٥	غير ذلك

⑯ طول العمود من النقطة (٥ ، -٥) على المستقيم ص = صفر يساوي ....وحدة طول

صفر	٥	-٥	٢

⑰ طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، -٣) على المستقيم س – ١ = صفر يساوي ....وحدة طول

٢	٣	٤	٥

⑱ طول العمود المرسوم من نقطة الأصل إلى الخط المستقيم الذي معادلته :

أس + ص + حـ = صفر يساوي ....

$\frac{\|حـ\|}{أ}$	$\frac{حـ}{أ + ١}$	$\frac{حـ}{\sqrt{أ^٢ + ١}}$	$\frac{\|حـ\|}{\sqrt{أ^٢ + ١}}$

⑲ دائرة مركزها النقطة (-١ ، ٣) والمستقيم ٥س + ٢ = ١٢ ص مماس لها فإن طول نصف قطر الدائرة =......................وحدة طول

٣	٤	٥	٦

الدرس التاسع — المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين معلومين

① معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين س = ٢ ، ٢ + ص = ٣ ويوازي محور السينات هي......

ص = ٢	ص =١	س =٢	س =١

② معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين س -٢ = ٠ ، ص =١ ويمر بنقطة الأصل هي ......

س = ص	س = ٢ ص	ص = ٢س	س + ص =١



③ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين س = ٢ ، ص =٣ وميله =١ هي ....

ص – س + ١ =٠	ص – س =١	س – ص = ٥	س – ص =٣

④ معادلة المستقيم الذي يقطع من المحورين السيني والصادي جزأين موجبين مقدارهما ٢ ، ٣ على الترتيب هي ....

٣س–٢ ص = ٦	٣س –٢ص + ٦ = ٠	٢س + ٣ص =٦	غير ذلك

⑤ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين س = ١ ، س + ص = ٣ ويوازي محور الصادات هي ....

س =١	س = ٢	ص =١	ص =٢

⑥ نقطة تقاطع المستقيمين س + ٣ = ٠ ، ص –٢ = ٠ هي ....

(٢ ، ٣)	(٣ ، ٢)	(–٣ ، ٢)	(٣ ، –٢)

⑦ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين ٣س – ٥ص = ١٣ ، ٢ص –٣س + ٧ = ٠ والنقطة ، (٣ ، ٢) هي ....

٢س + ص + ٤ = ٠	٢س – ص – ٤ = ٠
٢س – ص + ٤ = ٠	غير ذلك

⑧ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س +٣ ص –١ = ٠ ، ٣س –٥ ص + ٤ = ٠ وميله = ٢ هي ....

٤س –٣ ص + ٣ = ٠	٣س –٤ص + ٣ = ٠
٤س –٤ص + ٣ = ٠	٣س –٣ ص + ٣ =٠

⑨ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين س + ص –٣ = ٠ ٢س – ص –٦ =٠ وبالنقطة (٢ ، –١) هي ....

س + ص + ٣ =٠	س – ص –٣ =٠
س – ص + ٣ = ٠	س + ص –٣ = ٠

اختبارات عامة على الفصل الدراسى الثانى

الصف الأول الثانوى — النموذج (الأول) — فصل دراسى ثانى — ١

أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

١ إذا كانت أ = (٣ ، ١) ، ب = (٦ ، –٣) فإن ‖ أ ب ‖ = ...

٨	١٠	٥	١٥

٢ المتجه أ = ٢ س + ٢ √٣ ص على الصورة القطبية هى ....

(٤ ، ٣٠°)	(٤ ، ٦٠°)	(٤ ، ١٢٠°)	(–٤ ، ٦٠°)

٣ أ ب حـ ء متوازى أضلاع حيث أ = (٣ ، ٠) ، ب = (٠ ، ٤) ، ء = (–٢ ، –١)
فإن إحداثى النقطة حـ = ...

(٣ ، ٥)	(–٣ ، –٥)	(–٥ ، ٣)	(٠ ، ٣)

٤ مجموعة حل المعادلة حاس – جتاس = ٠ حيث ١٨٠° < س < ٣٦٠ ° هى ....

{ ٤٥° ، ٢٢٥° }	{ ٤٥° }	{ ٢٢٥° }	{ ٢٤٠° }

٥ النقطة التى تنتمى لمنطقة حل المتباينة س > ٢ ، ص > ١ ، س + ص ≤ ٣ هى ....

(٢ ، ١)	(١ ، ٢)	(٣ ، ٢)	(١ ، ٣)

٦ إذا كان ‖–٧ أ‖ = ١٤ ‖ ك أ ‖ فإن ك =

$\frac{1}{2}$	± $\frac{1}{2}$	٢	± ٢

٧ إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (–٤ ، ٢) على المستقيم ٢س + ٣ص + حـ = صفر
يساوى صفر فإن حـ = ...

١	٢	٣	٦

٨ إذا كانت $\begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & –١ \\ –٣ & س \end{pmatrix} = I$ فإن س = ...

٣	٤	٥	٢



٩ إذا كان المستقيم ٢س + ٣ص − ١٢ = ٠ يقطع محورى الأحداثيات ٩ ، ب

فإن مساحة المثلث و ٩ ب = ... وحدة مربعة (حيث و نقطة الأصل)

٤	٦	٨	١٢

١٠ المستقيم الذى اتجاهه ي = (−١ ، ٢) يكون ميله المستقيم العمودى عليه ....

$\frac{-1}{2}$	−٢	$\frac{1}{2}$	−١

١١ إذا كان $\begin{vmatrix} ٢س & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}$ = ١٠ فإن س = ...

٢	٣	٤	٥

١٢ قطاع دائرى مساحته = ٤٠ سم٢ وقياس زاويته المركزية ٣,٢ ء

فإن طول نصف قطر دائرته = ...

٠,٥	١٠	١,٥	٥

١٣ إذا كان ٩ = (٤ ، ٢) ، ب = (١ ، −٢) فإن ‖ ٩ − ب ‖ = ...

−٥	٥	(٣ ، ٠)	(٣ ، ٤)

١٤ قياس الزاوية بين المستقيم المار بالنقطة (٠ ، ١) ، (١ ، ٠) والاتجاة الموجب لمحور السينات

تساوى ....°

٠	٤٥	٩٠	١٣٥

١٥ قيمة س التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} س & ٨ \\ ٢ & س \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى هى ....

٢	٨	١٦	± ٤

١٦ قطاع دائرى طول قوسه ٦سم وطول قطر دائرته ١٠ سم فإن محيط القطاع = ...سم

١٦	١٧	٢٦	٦٠

١٧ مجموعة الحل للمعادلة $\begin{vmatrix} \text{س} & ١ \\ ٣ & \text{س} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = ٤$ هو ....

- ± ٢
- ± ٣
- $\frac{٣}{٢}$
- $\frac{٢}{٣}$

---

١٨ ميل المستقيم الذى معادلته $\frac{\text{س}}{٥} + \frac{\text{ص}}{٢} = ١$ هى ....

- $\frac{٥}{٢}$
- $\frac{-٥}{٢}$
- $\frac{-٢}{٥}$
- غير ذلك

---

١٩ إذا قطع المستقيم ٢س + ٣ص + ٢٤ = ٠ محور السينات فى النقطة أ ومحور الصادات فى نقطة ب فإن مساحة Δ و أ ب = ... وحدة مساحة

- ١٢
- ٢٤
- ٦
- ٤٨

---

٢٠ النقطة .... تنتمى لمجموعة حل المتباينة ٢ س + ص > ٦

- (١ ، ٤)
- (٠ ، ٠)
- (٤ ، -٢)
- (٢ ، ٣)

---

٢١ قياس الزاوية بين المستقيمين س = ٣ ، ص – ٢ = ٠ هى ....°

- ٣٠
- ٤٥
- ٦٠
- ٩٠

---

٢٢ إذا كانت ٩٠° < هـ < ١٨٠° ، ٢ جتا هـ + $\sqrt{٣}$ = ٠ فإن ق $(\hat{\text{هـ}})$ = ...°

- ٣٠
- ٦٥
- ١٢٠
- ١٥٠

---

٢٣ مساحة سطح ثمانى منتظم طول ضلعه ١٠ سم = ...

- $\frac{٢٠٠}{\text{ظ} \frac{\pi}{٨}}$
- ٢٠٠ ظ $\frac{\pi}{٨}$
- ١٠٠ ظتا $\frac{\pi}{٨}$
- ٨٠٠ ظتا $\frac{\pi}{٨}$

---

٢٤ إذا كان $\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{أ}} = ١٥ \overleftarrow{\text{ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{ب}} = ٥ \overleftarrow{\text{ى}}$ فإن $\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{أ ب}}$ = ...$\overleftarrow{\text{ى}}$

- ٢٠
- -٢٠
- ١٠
- -١٠

---

٢٥ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٣ & \text{س} & ٥ \\ -٢ & \text{صفر} & \text{ص} \\ ٥ & -١ & ٤ \end{pmatrix}$ متماثلة فإن قيمة المقدار س^٢ -٣ ص = ...

- ٥
- ٧
- -١
- صفر

٢٦ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين س = ٢ ، ص − ١ = صفر ويمر بنقطة الأصل هي ....

س = ص	س = ٢ص	ص = ٢س	٢ ص + س = ٢

٢٧ مجموعة حل المعادلة
$$\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٢ & س-١ & ٠ \\ ٣ & ٤ & س+٢ \end{vmatrix} = ٠$$

{١}	{٣ ، ٤}	{٢ ، ٣}	{١ ، −٢}

٢٨ المقدار : جا θ جا (٩٠° − θ) ظا θ = ...

جتا θ	جا² θ	ظا² θ	١

٢٩ مساحة المثلث الذي رؤوسه (١ ، ٢) ، (٣ ، −٤) ، (−٢ ، ٣) باستخدام المحددات تساوي .... وحدة مربعة

٥	٦	٧	٨

٣٠ طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على المستقيم ٣س −٤ص + ١٥ = صفر هو ....

٣	٤	٥	٦

٣١ إذا كان ظا θ = ٣ ، فإن قا² θ = ...

٩	١٠	٤	٦

٣٢ إذا كانت معادلة المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٢) + ك (٤ ، −١) فإن ميل المستقيم العمودي عليه =.......

$\frac{-١}{٤}$	٤	−٤	$\frac{١}{٤}$

٣٣ الحل العام للمعادلة : جتا θ = ١ هو ....

ن π	٢ن π	$\frac{\pi}{٢}$ + ن π	$\frac{\pi}{٢}$ +٢ ن π

٣٤ المعادلة المتجهة لمحور السينات هى ....

$\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ١) + ك (٠ ، ٠)	$\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٠) + ك (١ ، ١)
$\overleftarrow{ر}$ = ك (١ ، ٠)	$\overleftarrow{ر}$ = ك (٠ ، ١)

٣٥ إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، ب^مد^ مصفوفة على النظم ٢ × ٣

فإن المصفوفة أ × ب على النظم ....

٢ × ٣	٣ × ٣	٢ × ٢	٣ × ٢

٣٦ النقطة التي لا تقع في منطقة حل المتباينة ٢س − ص ≥ ٦ في ح × ح هي ....

(٠ ، ٠)	(٢ ، ١)	(٣ ، −٢)	(٥ ، ٥)

٣٧ إذا كانت أ = (٦ ، ٨) ب = (٣ ، م) وكان أ // ب فإن م = ...

٥	٦	−٤	٤

٣٨ إذا كانت حـ منتصف أب حيث أ = (٣ ، −٢) ب = (٥ ، ٦) فإن حـ =.........

(٨ ، ٤)	(٢ ، ٨)	(٤ ، ٢)	(١ ، −٣)

٣٩ إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ فإن عدد عناصر المصفوفة (أ) =...........

٥	٦	٤	٩

٤٠ إذا كان المستقيمان ٢س + ب ص + ٣ = ٠ ، ر = (٠ ، ٢) + ك (١ ، ٣) متعامدان

فإن ب =.....................

٦	−٦	٢	٣

الصف الأول الثانوى | النموذج (الثانى) | فصل دراسى ثانى | ٢

أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

١ إذا كانت : ٠° ≤ θ < ٣٦٠° وكانت جتا θ + ١ = ٠ فإن θ =..............

٩٠	١٨٠	٢٧٠	٣٦٠

٢ إذا كان ب = (٢ ، −١) ، حـ = ٣ س + ٢ ص فإن ب حـ =..............

(١ ، ٣)	(٥ ، ١)	(−١ ، −٣)	(١ ، −٣)

٣ إذا كانت المصفوفة أ على النظم ٣ × ٣ فإن عدد عناصر المصفوفة أ يساوي ....

٣	٦	٩	١٢



٣٤ النقطة التي تكون عندها الدالة $\overleftarrow{ر}$ = ٤٠$\overleftarrow{س}$ + ٢٠$\overleftarrow{ص}$ قيمة عظمى هي ....

(٠ ، ٠)	(٠ ، −٤)	(١٥ ، ١٠)	(٢٥ ، ٠)

٣٥ إذا كانت θ ∈] ٠ ، π [، ظتا θ = ١ فإن θ = ...°

٣٠	٤٥	٦٠	١٣٥

٣٦ قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيم ٣ ص = ٦س + ٥ والمستقيم الذي ميله يساوي $\frac{١}{٣}$ تساوي ....°

٣٠	٤٥	٦٠	غير ذلك

٣٧ إذا توازي المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٢) والمستقيم ص = ٢ س −٣ فإن ٢ = ...

$\frac{٢}{٣}$	$\frac{-٢}{٣}$	$\frac{٣}{٢}$	$\frac{-٣}{٢}$

٣٨ إذا كانت النقطة (٣ ، ٤) تنتمي لمجموعة حل المتباينة س + ص ≥ ٢ فإن..............

٢ < ٧	٢ > ٧	٢ ≤ ٧	٢ > صفر

٣٩ إذا كانت حـ تقسم $\overleftarrow{٢ب}$ بنسبة ٥ : ٧ من الخارج فإن $\frac{٢حـ}{٢ب}$ = ...

$\frac{٢}{٥}$	$\frac{٥}{٢}$	$\frac{٥}{٧}$	غير ذلك

٤٠ معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، −٣) ويوازي محور السينات هي ......

س = −٣	ص = −٣	س = ٢	ص = ٣

الصف الأول الثانوى — النموذج (العاشر) — فصل دراسى ثانى — ١٠

أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

١ النقطة التي تنتمي إلى مجموعة حل المتباينتين س > ٢ ، ص > ١ معا هي ....

(١ ، ١)	(٢ ، ١)	(١ ، ٢)	(٣ ، ٢)

٢ المتجهان $\overleftarrow{٢}$ = (ك ، ٣) ، $\overleftarrow{ب}$ = (ك ، −١٢) متعامدان فإن ك =..................

−٦	± ٦	٩	± ٩

٣ قطاع دائري طول قوسه (ل) وقياس زاويته ($\theta^{°}$) مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها (نق) فإن محيطه = ...

نق + ل	نق + ٢ ل	نق (٢ + $\theta^{°}$)	٢ نق (١ + $\theta^{°}$)

٤ ميل المستقيم المار بالنقطتين (أ ، أ²) ، (ب ، ب²) هو ....

أ² − ب²	أ − ب	أ + ب	أ ب

٥ $\frac{\text{قا}^2\theta - \text{ظا}^2\theta}{\text{حا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta}$ فى أبسط صورة يساوى ....

١	ظا²θ	−١	قا²θ

٦ إذا كانت س مصفوفة بحيث س × $\begin{pmatrix}١\\٢\end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix}١\\٢\end{pmatrix}$ فإن س يمكن أن تكون ......

$\begin{pmatrix}١ & ٠\\ ٠ & ١\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}٠ & ١\\ ١ & ٠\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}١\\١\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}١ & ١\end{pmatrix}$

٧ جميع المقادير التالية متساوية ما عدا ....

(حاθ − جتاθ)² + ٢ حاθ جتاθ	قتا²θ − ظتا²θ	جتا²θ − ١ + حا²θ	(حا θ + جتاθ)² − ٢ حاθ جتاθ

٨ ميل المستقيم العمودي على المستقيم الذي معادلتيه الوسيطتين س = ٢ + ك ، ص = ١ − ك هو ....

−١	صفر	١	٢

٩ إذا كان أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان | أ | = ١٥ فإن | ٢ أ | = ...

١٥	٣٠	٦٠	١٢٠

١٠ إذا كان ى = ($\frac{١}{٢}$ ، ١) متجه اتجاه للمستقيم فإن جميع المتجهات التالية عمودية على المستقيم عدا المتجه ....

(١ ، − $\frac{١}{٢}$)	(٢ ، −١)	(−١ ، − $\frac{١}{٢}$)	(٤ ، −٢)

١١ الحل العام للمعادلة : ٣ ظتا ($\frac{\pi}{٢}$ − θ) = $\sqrt{٣}$ هو ....

$\frac{\pi}{٦}$ + ٢πن	$\frac{\pi}{٦}$ + π ن	$\frac{٧\pi}{٦}$ + ٢ π ن	$\frac{\pi}{٣}$ + π ن



١٢ المتجه (٢ $\sqrt{2}$ ، $\frac{3\pi}{4}$) يعبر عنه بالصورة الإحداثية ....

(−٢ ، ٢)	(−٢ ، −٢)	(٢ ، ٢)	(٢ ، −٢)

١٣ إذا كان ﻫ ، ب مصفوفتين حيث ﻫ ب = $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$ فإن ب ^{مد} ﻫ ^{مد} = ...

$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 20 & 4 \end{pmatrix}$

١٤ راقبت سيارة سرعتها ٥٠ كم /س سرعة سيارة تتحرك في الاتجاه المضاد لحركتها فبدت لها وكأنها تتحرك بسرعة ١٢٠كم /س فإن السرعة الفعلية لهذه السيارة = ... كم /س

١٧٠	١٢٠	٧٠	٥٠

١٥ إذا كان حا θ + حا^2 θ = ١ فإن القيمة العددية للمقدار : جتا^2 θ + جتا^4 θ = ...

−١	١	حا^2 θ	٢

١٦ النقطة التي تكون عندها للدالة $\overleftarrow{ر}$ = ٤٠ $\overleftarrow{س}$ + ٢٠ $\overleftarrow{ص}$ قيمة عظمى هي ....

(٠ ، ٠)	(٠ ، −٤)	(١٥ ، ١٠)	(٢٥ ، ٠)

١٧ مساحة الشكل الثماني المنتظم الذي طول ضلعه ٨ سم تساوي ....سم^2

٣٠٠	٣٠٥	٣٠٩	٣٢٠

١٨ مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} س - 2 & 0 & 0 \\ 2 & س - 4 & 0 \\ 3 & -1 & س \end{vmatrix}$ = صفر هي ....

{٠}	{٢ ، −٢ ، ٠}	{٢ ، ٤ ، ٠}	{٢ ، ٤ ، −١}

١٩ قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين س = ٣ ص ، س + ٢ ص = صفر هو ....°

١٥	٣٠	٤٥	٦٠

٢٠ طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على المستقيم ٣س −٤ ص + ١٥ = صفر هو .....

٣	٤	٥	٦

٢١ الصورة العامة للمستقيم المار بالنقطة (−٣ ، ٤) ويضع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هي ......

س − ص −٧ = ٠	س + ص −٧ = ٠	س − ص + ٧ = ٠	س = ص

٢٢ المستقيم الذي معادلته $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٦} = ١$ يصنع مع محور الإحداثيات مثلثاً مساحته = ... وحدة مربعة

٣	٦	٩	١٨

٢٣ إذا كان أ ، ب مصفوفتين وكان أ ب معرف فإن $(أ ب)^{مد}$ = ...

أ ب	$(ب أ)^{مد}$	$ب^{مد} أ^{مد}$	ب أ

٢٤ أ ب حـ مثلث قائم في حـ ، أ ب = ٨سم ، ق($\hat{ب}$) = ٣٢° ١٧َ فإن أ حـ = ...= لأقرب سم

٣	٤	٥	٦

٢٥ المستقيم العمودي على المستقيم $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٥) + ك ($\sqrt{٣}$ ، ١) يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ....°

٣٠	٦٠	١٢٠	١٥٠

٢٦ النقطتين أ(٢ ، ٣) ، ب (−٤ ، ١) تقعان على ..... من الخط المستقيم ل : ٣ س − ص + ٥ = ٠

جانب واحد	جانبين مختلفين	الخط المستقيم	غير ذلك

٢٧ في الشكل المقابل :

يمثل مجموعة حل المتباينة .... بيانياً في ح × ح

س > ص	ص > س	س = ص	س + ٢ص > ١

٢٨ المقدار حا (٩٠° − θ) قتا (٩٠° − θ) في أبسط صورة يساوي ....

١	$حا^٢ θ$	$جتا^٢ θ$	حا θ قتا θ

٢٩ الصورة القطبية لمتجه $\overrightarrow{و أ}$ = (٨$\sqrt{٣}$ ، ٨) هي ....

(٨ ، ٣٠°)	(١٦ ، $\frac{π}{٣}$)	(١٦ ، $\frac{π}{٦}$)	(٨ ، $\frac{π}{٦}$)

٣٠ في الشكل المقابل : م نقطة تقاطع متوسطات المثلث

فإن $\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{أ حـ}$ = ...

$\overrightarrow{أ ء}$	٣ $\overrightarrow{أ م}$	$\overrightarrow{ب حـ}$	غير ذلك

٣١ المصفوفة $\boxed{}_{٢ \times ٢}$ بطريقة السرد هي ....

$\begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

٣٢ إذا كان $\pi \leq \theta < ٢\pi$ وكانت ٢ جتا θ + ١ = صفر فإن θ =...............°

٢١٠	٢٤٠	٣٠٠	٣٣٠

٣٣ قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم ٣س −٣ ص + ٥ = ٠ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هي ....°

٣٠	٤٥	٦٠	٩٠

٣٤ طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ١) إلى المستقيم س + ص = صفر يساوي.....وحدة طول

١	٢	$\sqrt{٢}$	$٢\sqrt{٢}$

٣٥ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix}$ فإن أ^٢ − ٥ أ + ٢ I =..............

$\begin{pmatrix} -٦ & ٤ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

٣٦ مساحة سطح المثلث المتساوي الأضلاع الذي طول ضلعه ٦سم يساوي ....سم^٢

$٦\sqrt{٣}$	$٩\sqrt{٣}$	$١٢\sqrt{٣}$	$١٨\sqrt{٣}$

٣٧ إذا كان $\overleftarrow{م}$ = (٣ ، ٢) ، $\overleftarrow{ن}$ = (٣ ، ك) ، $\overleftarrow{م} \perp \overleftarrow{ن}$ فإن ك =......

−٢	$\frac{٩}{٢}$	$\frac{-٩}{٢}$	٢

٣٨ إذا كان $\overleftarrow{ع_أ}$ = ١٢ ، $\overleftarrow{ع_ب}$ = ٨ فإن $ع_{أب}$ = ...

٢٠	−٢٠	٤	−٤

٣٩ النقطة التي تنتمي إلى مجموعة حل المتباينات الآتية س > ٢ ، ص > ١ ، س + ص ≤ ٣ هي ......

(٢ ، ١)	(١ ، ٢)	(٣ ، ٢)	(١ ، ٣)

٤٠ الحل العام للمعادلة حا θ + ١ = صفر يمكن أن يكون ....

$\frac{٣\pi}{٢}$	$\frac{٣\pi}{٢} + \pi$	$\frac{٣\pi}{٢} + ٢\pi ن$	$\frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$